

# 从漂移速度到相对论时空变换\*

吴从军<sup>†</sup>

(西湖大学物理系 新基石科学实验室 杭州 310024)

2024-11-14收到

<sup>†</sup> email: wucongjun@westlake.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20250211

CSTR: 32040.14.wl20250211

文章提供了一种基于基础电磁学来引入狭义相对论的方法, 无需借助麦克斯韦方程组。通过研究电荷和磁单极在正交电磁场中的漂移速度, 可以得出“物理”的漂移速度存在一个普适的上限(即光速)。这样光速不变性及其不可超越性, 就成为相对性原理的推论。在正交电磁场中, 电荷和磁单极的漂移运动在惯性参考系之间的变换下, 仍然保持漂移运动, 而这与伽利略的速度迭加法则并不相容。以此出发, 可以导出相对论的速度迭加法则、电磁场以及时空坐标间隔的相对论变换。

## 1 引言

自伽利略时期以来, 人们开始接受了相对性原理(relativity principle): 所有的惯性参照系(下文简称参照系)是彼此等价的, 没有一个参考系比另外一个更为特殊。例如, 考虑地面参考系 $F$ 和相对于地面做匀速运动的火车参考系 $F'$ 。这两个参照系中牛顿运动定律的形式是完全一样的。

到了19世纪后半叶, 电磁场的麦克斯韦方程已经建立。电磁学规律是否依赖于参照系的选择, 也就是以太是否存在, 成为一个重要的问题。在探索此问题的过程中, 以爱因斯坦为代表的一批物理学家创立了狭义相对论, 证明以太并不存在, 解决了电磁学规律在不同惯性系之间的变换问题<sup>[1]</sup>。

近期, 金晓峰教授对狭义相对论早期发展的历史渊源, 做了大量细致的研究<sup>[2]</sup>。他把庞加莱对创立狭义相对论的重大贡献, 从文献中整理了出来, 连载发表于《物理》之上。这项工作对物理方向的学生和研究人员有很大帮助。

狭义相对论已经成为了现代物

理学的基石。光速不变及不可超越、同时性的相对性、质能关系等深刻地影响了人类对时空观念的认知。狭义相对论通常在《普通物理》的力学部分讲授。经典教材《伯克利物理学教程·第一卷》<sup>[3]</sup>和《费曼物理学讲义·第一卷》<sup>[4]</sup>, 都是这样处理的。

狭义相对论的基础是时空坐标的洛伦兹变换。它的推导通常基于下面两个公设(postulate):

**公设(I): 相对性原理。**这是伽利略相对性原理的推广版, 物理定律在所有惯性系中都是一样的, 包括了电磁学定律;

**公设(II): 光速不变性。**即光的传播速度在各个参照系中都是一样的。

相对性原理无疑是很自然的, 容易让人接受, 但是光速不变性则显得很神秘。光速不变源自于麦克斯韦方程在时空变换下的不变性, 但这超出了力学的框架, 只能作为一个公设提出。这使得相对论时空变换的传统推导, 不那么令人信服。相关的结论, 比如时间膨胀、长度缩短等, 显得耸人听闻, 非常的反直觉。

以作者在学生时代的经历来说, 《普通物理》力学部分的相对论

教学并没有让我从内心深处真正理解。狭义相对论和宏观低速的日常生活体验相去甚远。在可预见的将来, 人类也不会有机会去乘坐光速飞船, 很难有相对论时空观的直觉。

作者是在学习《普通物理》电磁学的过程中, 逐步接受相对论的。E. M. Purcell的经典教材《伯克利物理学教程·第二卷》将磁场表述为电场经过相对论变换的产物<sup>[5]</sup>。一个静电荷只产生电场, 但是如果从火车上观察, 电荷就动了起来, 产生了电流和磁场, 这只是换了个参照系而已。让人印象深刻的是, 将相对论变换应用于静电场所得的磁场和安培定律所给出的磁场, 是一致的。我无法否认磁力的存在, 也就接受了相对论的合理性。

本文将提供一种新的方法来建立狭义相对论, 帮助学生更加容易地接受它。这个方法只需要基础的电磁学知识即可, 不需要有麦克斯韦方程的知识。我们将阐明, 即使是对正交电磁场中的电荷以及磁单极子漂移速度这样简单的问题, 伽利略时空变换也是不适用的。

我们发现漂移速度存在一个普适的上限(即光速), 否则会违反相对性原理, 因此光速不变就不需要作为一个公设来提出了。参照系之

\* 国家自然科学基金(批准号: 12234016)、新基石科学基金资助项目

间电磁场的变换法则、相对论速度迭加法则、时空坐标的洛伦兹变换, 都可以很自然地得到。

有关文献中已经有不依赖光速不变重新推导相对论的工作<sup>[6-8]</sup>。基于时空的均匀性和各向同性, 可以得出仅存在洛伦兹、伽利略和旋转等三类变换, 其中洛伦兹变换和伽利略变换可以满足因果关系(causality)。如果进一步要求相互作用不能是瞬时的, 那么洛伦兹变换是唯一的选择。这些工作都在力学范围内, 而本文的侧重点是从电磁场变换的角度来推导时空相对论变换。

本文的推导假定了磁单极的存在。实验上在1982年曾有过探测磁单极子的报道<sup>[9]</sup>, 但是没有能够重复, 并没有得到公认。对磁单极的实验探索, 也是目前粒子物理的重要课题之一<sup>[10]</sup>。电磁理论是允许磁单极存在的, 并不违反任何基本原理。狄拉克对磁单极规范理论的研究, 揭示了电荷量子化和磁单极之间的深刻关系, 对于当代理论物理的发展起到了重要的推动作用<sup>[11-13]</sup>。本文的结果也显示了磁单极和相对论之间的紧密关系。

综上所述, 相对论并不神秘, 而且非常的自然。体验相对论并不需要去造光速飞船, 磁力的存在就是一个证据。相对论并不是颠覆了牛顿力学和时空观, 而是对其进行了发展, 后者仍然是前者在低速时很好的近似。科学家是保守的革命者, 不会随便颠覆经过检验的理论。

本文以下部分按这样安排。在第2节中, 分析电荷和磁单极在正交电磁场中的漂移速度。在第3节中, 得出物理速度存在上限的结论。在第4节中, 考察速度在不同参考系之间的变换关系, 得出相对论的速度

迭加公式。在第5节中, 论证物理速度上限的普适性。在第6节中, 得出电磁场、时空间隔的洛伦兹变换。最后对全文进行总结。

下文中提到的速度, 如果没有特别声明其方向性的话, 从严格意义上说, 应该是速率(speed)。为行文的简单性起见, 我们不区分“速度”和“速率”的用词, 这并不会引起混淆。

## 2 漂移速度

我们从回顾基础的电磁学开始。考虑一个在惯性参考系 $F$ 中配置的正交电磁场构型, 如图1所示。我们假设:

$$\mathbf{B} = B_z \hat{z}, \quad \mathbf{E} = E_y \hat{y}. \quad (1)$$

对于带电粒子 $q$ 而言, 它所受的电场力和磁洛伦兹力表达为

$$\mathbf{F}_q = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (2)$$

对于带磁荷 $g$ 的磁单极子, 其所受的磁场力和电洛伦兹力的表达式为

$$\mathbf{F}_g = g \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right). \quad (3)$$

对比带电粒子的磁洛伦兹力, 磁单极子的电洛伦兹力, 在形式上符号相反, 其物理意义将在Box 1中进行说明。

我们使用的是高斯单位制, 其优势在于采用此单位制可以使得公式具有电磁对称性。如果使用国际单位制的话, 则 $\mathbf{F}_q$ 和 $\mathbf{F}_g$ 的公式变为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_q &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{F}_g &= g \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

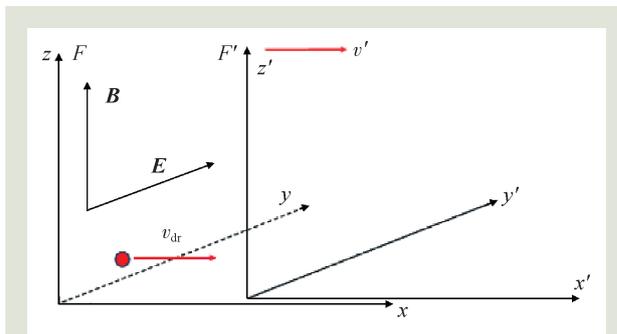


图1 在参考系 $F$ 中的正交电磁场位型: 电场 $\mathbf{E}$ 沿着 $y$ 方向, 磁场 $\mathbf{B}$ 沿着 $z$ 方向。沿着 $x$ 方向的 $v_{\text{dr}}$ 是电荷或磁单极子在此电磁场中的漂移速度, 由(6)或(7)式确定。参考系 $F'$ 相对于 $F$ 以速度 $v'$ 沿着 $x$ 轴运动

其中 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 。

到目前为止,  $c$ 只是一个具有速度量纲的物理量而已, 还不具备相互作用传播速度上限的含义。在磁单极存在的前提下, 我们可以通过如下的思想实验(Gedanken experiment)来测定速度 $c$ 。在图1所示的正交电磁场位型, 对静止的带电荷 $q$ 的粒子测其受到的电力 $F_{q,E}$ , 再让其沿着 $x$ 方向以速度 $v_x$ 运动, 测得磁洛伦兹力 $F_{q,B}$ 。对带磁荷 $g$ 的磁单极子也做同样的测量, 可得其受到的磁力 $F_{g,B}$ 和电洛伦兹力 $F_{g,E}$ 。则 $c$ 可以通过下式定出,

$$c^2 = \frac{F_{q,E} F_{g,B}}{\left( \frac{F_{q,B}}{v_x} \right) \left( \frac{F_{g,E}}{v_x} \right)}. \quad (5)$$

这样的测量方法和测量所用的电场、磁场、电荷、磁荷以及它们的运动速度都没有关联, 具有很高的普适性。

根据公式(2), 则可以定义电荷漂移速度 $v_q$  (drift velocity), 即电荷 $q$ 以该速度沿着 $x$ 方向运动时, 其受到电场力和磁洛伦兹力平衡, 保持匀速直线运动。电荷漂移速度 $v_q$ 由以下公式得出:

$$\frac{v_q}{c} = \frac{E_y}{B_z}. \quad (6)$$

类似地，也可以定义磁单极子的漂移速度 $v_g$ ：

$$\frac{v_g}{c} = \frac{B_z}{E_y}. \quad (7)$$

当磁荷 $g$ 以 $v_g$ 沿着 $-x$ 方向运动时，其受到的磁力和电洛伦兹力平衡。

一个很自然的问题是，(6)式和(7)式中的电荷漂移速度和磁荷漂移速度，是否都是“物理”的？

### 3 论证物理速度上限的存在

先明确一下什么样的速度是“物理”的。一个速度 $v$ 是“物理”的，指的是它原则上可以通过粒子的运动来实现。例如，在实验室参照系中设计一个正交电磁场装置，使得一个带电粒子或磁单极子以 $v$

做漂移运动。如果做不到的话，则 $v$ 是“非物理的”。当带电粒子或磁单极子以“物理”的漂移速度运动时，则可以定义跟着它们的随动参考系。在随动参考系中，电荷或磁单极子是静止的。

速度绝对值 $|v|$ 的取值为非负的，从0开始到无穷大。关于“物理”和“非物理”的速度，我们有以下一些合理的推论。

**推论(I)：**静止(速度 $v=0$ )无疑是“物理”的。因为运动是存在的，则必定存在一个有限大小的“物理”速度；

**推论(II)：**因为速度可以从0开始连续地增加，如果速度 $v$ 是“物理”的，且速度 $u$ 满足 $|u| \leq |v|$ 的

话，那 $u$ 也是“物理”的；

**推论(III)：**如果“物理”的速度不包括无穷大的话，则速度的取值范围可以被划分成一些“物理”的和“非物理”的区域。根据推论(II)，则只能存在两大块区域，它们之间以一个阈值 $v_{th}$ 来分隔。满足 $0 \leq |v| < v_{th}$ 的速度是“物理”的，反之 $|v| > v_{th}$ 的速度是“非物理”的(图2)。

我们下面将论证对于带电粒子的漂移速度 $v_q$ ((6)式)和磁单极子的漂移速度 $v_g$ ((7)式)，不可能两者都是“物理”的，否则与相对性原理矛盾。

考虑跟随带电粒子 $q$ 的随动参考系 $F_{dr}$ ，它以电荷漂移速度 $v_q$ 相对

#### Box 1 磁单极子的电洛伦兹力

我们将论证磁单极子在电场中所受洛伦兹力的公式(3)的合理性。考虑一个由电荷 $q$ 和磁单极子 $g$ 组成的双荷系统。假设磁单极子 $g$ 固定在原点，而电子围绕它运动。因为洛伦兹力不是向心的，所以电子的机械角动量 $\mathbf{L}_M = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$ 也不是守恒的。它的时间变换率为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_M = \mathbf{r} \times \frac{q}{c} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \frac{qg}{c} \mathbf{r} \times \left( \dot{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{qg}{c} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{r}}), \quad (A1)$$

其中 $\hat{\mathbf{r}}$ 为从磁单极子指向电荷的径向单位矢量。

该系统仍然具有转动对称性，应该具有角动量守恒。为此，需要修改电子总角动量的定义为 $\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_M + \mathbf{L}_{em}$ ，其中

$$\mathbf{L}_{em} = -\frac{qg}{c} \hat{\mathbf{r}}. \quad (A2)$$

这样定义的电子角动量就守恒了。另一方面，(A2)式可以视为双荷系统的电磁场角动量<sup>[14]</sup>。可以证明：

$$\mathbf{L}_{em} = \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (A3)$$

反过来，我们考虑另一种情况：电荷固定在原点，而磁单极子围绕它运动，定义 $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ 是从电荷指向磁单极子的位移矢量。相应地，总角动量可以被定义为

$$\mathbf{L}'_{tot} = \mathbf{L}'_M + \mathbf{L}'_{EM}. \quad (A4)$$

其中 $\mathbf{L}'_M = \mathbf{r}' \times m_g \dot{\mathbf{r}}'$ ，而双荷系统电磁场的角动量可以表达为

$$\mathbf{L}'_{EM} = \frac{qg}{c} \hat{\mathbf{r}}'. \quad (A5)$$

因此，机械轨道角动量的时间导数应满足：

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}'_M = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}_{L,g} = -\frac{d}{dt} \mathbf{L}'_{EM} = -\frac{qg}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}'}{r} \right). \quad (A6)$$

要得到和(A6)式相一致的结果，则需要有：

$$\mathbf{F}_{L,g} = -\frac{g}{c} \dot{\mathbf{r}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}'). \quad (A7)$$

这样就得到了(3)式。

于实验室参照系 $F$ 沿 $x$ 轴运动。在 $F_{dr}$ 中,电荷静止,因此电力和磁力都为零。这意味着电场为零,但是磁场不能也为零。否则的话, $F_{dr}$ 里是既无电场也无磁场的真空,实验室系 $F$ 相对于 $F_{dr}$ 的运动使得 $F$ 中产生了正交电磁场。它们之间的相对运动具有绕 $x$ 轴的旋转对称性,但是正交电磁场并不具有此对称性,这就产生了矛盾。

下一步,我们在电荷随动参照系 $F_{dr}$ 中放入磁单极子 $g$ ,则 $F_{dr}$ 中的磁场会导致磁单极子加速。根据相对性原理,加速度是不能通过惯性参考系变换来消除的。

再考虑跟随带磁荷 $g$ 的磁单极子的随动参照系 $F'_d$ ,它以磁荷漂移速度 $v_g$ 相对于参照系 $F$ 沿着 $-x$ 轴运动。在 $F'_d$ 中,磁荷静止,其受到的电力和磁力都应为零,没有加速度。可见,如果电荷漂移速度 $v_q$ 和磁荷漂移速度 $v_g$ 都是“物理”的话,就产生了矛盾。

根据推论(III)，“物理”和“非物理”的速度区域之间存在一个阈值速度 $v_{th}$ 。

#### 4 速度的迭加公式

我们推导的关键是相对性原理——所有惯性参考系都是等价的。“物理”的漂移运动是匀速直线运动,因此惯性参考系变换不会改变这一性质。换句话说,如果电力和磁力在某个参考系中保持平衡,在任何其他参考系中,它们也会保持平衡。

考虑电磁场在不同参考系之间的变换关系。设电磁场在参考系 $F$ 中为 $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ,而在 $F'$ 中为 $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ 。不失一般性,假设参考系 $F'$ 以速度 $v'$ 沿 $x$ 轴相对于参考系 $F$ 运动。

这两个参照系的相对运动具有如下的对称性,包括关于推进(boost)轴 $x$ 轴的旋转操作对称性,以及相对于 $xz$ 平面和 $xy$ 平面的镜面反射对称性,如图1所示。

我们先根据电磁场各分量在绕 $x$ 轴旋转下的不同变换性质,将其分为纵向分量( $E_x$ 和 $B_x$ )和横向分量( $E_y, E_z$ 和 $B_y, B_z$ )。前者是转动不变的,而后者在 $y$ 和 $z$ 分量之间转化。在做参考系变换时,横向分量和纵向分量之间并不混合。

电场和磁场一个是极矢量,一个是轴矢量。两者在旋转变换下的行为是一样的,但是在镜面反射变换下的行为则非常不同。平行于镜面的电场分量在反射下保持不变,而垂直于镜面的电场分量在反射下反向。磁场则相反,平行于镜面的磁场分量在反射下反向,而垂直于镜面的磁场分量在反射下不变。这些性质在表1中进行了总结。

我们先看电磁场的纵向分量( $E_x$ 和 $B_x$ ),可以进一步根据它们在镜面反射下的性质进行分类。对于 $xz$ 平面的镜面反射操作, $E_x$ 和 $B_x$ 均平行于 $xz$ 平面,则 $E_x$ 不变,为偶变换;而 $B_x$ 反向,为奇变换。因此它们在参照系变换时,只会变到自身,而不会彼此混合。

对于 $E_x$ 来说,它只能改变一个因子 $\lambda$ ,即 $E'_x = \lambda E_x$ ,而且 $\lambda$ 只是依赖于 $v'$ ,而不依赖于电磁场。两个参照系彼此相对运动速度为 $\pm v'$ 。因为空间的各向同性, $\lambda$ 和 $v'$ 的方向无关,对 $v'$ 依赖只能以 $\lambda(|v'|)$ 的形

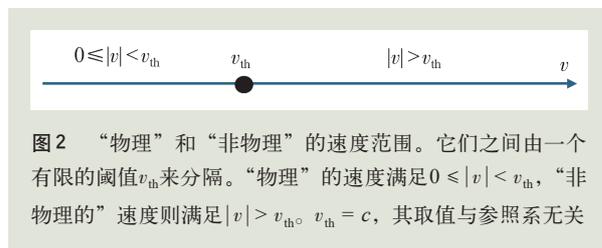


图2 “物理”和“非物理”的速度范围。它们之间由一个有限的阈值 $v_{th}$ 来分隔。“物理”的速度满足 $0 \leq |v| < v_{th}$ ，“非物理的”速度则满足 $|v| > v_{th}$ 。 $v_{th} = c$ ,其取值与参照系无关

表1 电磁场各分量在 $O(2)$ 对称操作下的变换性质

	$E_x$	$B_x$	$E_y, B_z$	$E_z, B_y$
绕 $x$ 轴旋转	纵向	纵向	横向	横向
对 $xy$ 平面的反射	$E_x$	$-B_x$	$E_y, B_z$	$-E_z, -B_y$
对 $xz$ 平面的反射	$E_x$	$-B_x$	$-E_y, -B_z$	$E_z, B_y$

式。如果进行一次 $F$ 到 $F'$ 的变换,然后再从 $F'$ 变回 $F$ ,则得到 $\lambda^2(|v'|) = 1$ 。相对速度可以从无限小速度开始,由连续性可以得到:

$$\lambda = 1. \quad (8)$$

同样的推理也适用于 $B_x$ 。因此,电场和磁场的纵向分量是不变的:

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x. \quad (9)$$

我们再看横向分量( $E_y, E_z$ 和 $B_y, B_z$ ),根据它们在镜面反射变换下的性质进行分类。 $B_z$ 分量平行于 $xz$ 平面, $E_y$ 分量垂直于 $xz$ 平面,因此 $xz$ 平面反射变换对它们来说是奇变换,它们变成 $-B_z$ 和 $-E_y$ ;  $B_y$ 分量垂直于 $xy$ 平面, $E_z$ 分量平行于 $xy$ 平面,因此关于 $xy$ 平面的反射对它们来说为偶变换, $B_y$ 和 $E_z$ 保持不变。另一方面, $B_y$ 和 $E_z$ 在关于 $xz$ 和 $xy$ 平面的反射下的变换性质,正好与 $B_z$ 和 $E_y$ 相反。因此,从 $F$ 到 $F'$ 的参照系变换中, $B_z$ 和 $E_y$ 作为一组相互变换,而 $B_y$ 和 $E_z$ 作为另一组,两组之间并不发生混合。

我们假设 $E_y$ 和 $B_z$ 之间的变换为线性:

$$\begin{pmatrix} E'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ f & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix}. \quad (10)$$

其中,矩阵元素仅取决于变换速度 $v'$ ,而不依赖于电磁场的位型。可以在 $F$ 参考系中,选取合适的正交

电磁场，来定出这些变换矩阵元。

设在 $F$ 参考系中，选取 $\frac{E_y}{B_z} = \frac{v'}{c} = \beta'$ ，其中电荷的漂移速度为 $v'$ ，满足 $v' < v_{th}$ 。 $F'$ 参考系是跟着电荷的随动参考系。在 $F'$ 参考系中，电场为零，即 $E'_y = 0$ ，因此

$$\frac{b}{a} = -\frac{E_y}{B_z} = -\beta' \quad (11)$$

类似地，我们在 $F$ 参考系中选取 $\frac{B_z}{E_y} = \beta'$ ，则其中磁荷漂移速度为 $v'$ ，所以 $F'$ 参考系是随着磁单极子的随动参考系。因此，在 $F'$ 参考系中 $B'_z = 0$ ，得出：

$$\frac{f}{d} = -\frac{B_z}{E_y} = -\beta' \quad (12)$$

现在考虑 $F$ 参考系中一般的电磁场位型，满足 $\frac{E_y}{B_z} = \beta$ ，其对应的电荷漂移速度 $v = \beta c < v_{th}$ 是“物理”的。设想电荷 $q$ 在 $F$ 参考系中，以此速度 $v$ 做漂移运动。

我们在 $F'$ 参考系中考察这个运动，它也是个电荷的漂移运动。电磁场以及漂移速度在 $F'$ 参考系中的值，均和它们在 $F$ 参考系中的值不同，但是仍然能维持电荷的受力平衡。设在 $F'$ 参考系中的电荷漂移速度为 $u$ ，则应该满足：

$$\frac{u}{c} = \frac{E'_y}{B'_z} = \frac{aE_y + bB_z}{fE_y + dB_z} = \frac{a\beta - \beta'}{d(1 - \beta\beta')} \quad (13)$$

类似地，我们在 $F$ 参考系准备另一套正交电磁场的位型，使得 $\frac{B_z}{E_y} = \beta$ 。这样，一个磁单极子可以在其中以同样的速度 $v = \beta c$ 做漂移运动。我们在 $F'$ 参考系中观察磁荷的漂移运动，该速度的值仍然是 $u$ 。我们有：

$$\begin{aligned} \frac{u}{c} &= \frac{B'_z}{E'_y} = \frac{fE_y + dB_z}{aE_y + bB_z} \\ &= \frac{d}{a} \frac{\beta - \beta'}{1 - \beta\beta'} \end{aligned} \quad (14)$$

比较公式(14)和(15)式，可以得到 $\left(\frac{a}{d}\right)^2 = 1$ ，是和两个参照系相对速度无关的常数。进一步的，当 $\beta' = 0$ 时， $\frac{u}{c} = \beta$ ，则可以定出 $\frac{a}{d} = 1$ 。

至此，我们推导出了相对论的速度迭加定律：

$$\frac{u}{c} = \frac{\beta - \beta'}{1 - \beta\beta'} \quad (15)$$

值得注意的是，上述推导仅依赖于受力公式(2)和(3)，以及“物理”的漂移运动在惯性系变换下仍然是“物理”的漂移速度。

## 5 论证 $c$ 是物理速度的上限

在本节中，我们将阐明物理速度的上限 $v_{th}$ 和 $c$ 的关系。如果两个待合成的速度 $v = \beta c$ ， $v' = \beta' c$ 都是物理的，那么根据(15)式的迭加速度 $u$ 可以通过参照系变换而得到，因此也是物理的。基于这个事实，我们证明下面的定理：

**定理： $v_{th} = c$ ，而且 $c$ 的值不依赖于惯性参照系的选择。**

首先我们论证 $v_{th} < c$ 是不可能的。

如果 $v_{th} < c$ ，根据公式(14)，考虑如下的情况 $0 < \beta' = -\beta < \beta_{th}$ ，其中 $\beta_{th} = \frac{v_{th}}{c} < 1$ 。我们有：

$$u = \frac{2v}{1 + \beta^2} > \frac{2v}{1 + \beta_{th}^2}$$

这样在 $v_{th} > v > \frac{1 + \beta_{th}^2}{2} v_{th}$ 时，即可得到 $u > v_{th}$ 。这就出现两个物理的速度迭加之后超出 $v_{th}$ 的矛盾。

然后，我们论证 $v_{th} > c$ 也是不可能的。

如果 $v_{th} > c$ ，可以合适地选择 $E_y$ 和 $B_z$ 的值，使得 $1 \leq |B_z/E_y| \leq v_{th}/c$ 。根据(6)式和(7)式，则电荷漂移速度 $v_q$ 和磁荷漂移速度 $v_g$ 满足 $v_q \leq c \leq v_g \leq v_{th}$ 。两者都是“物理”的，这和第3部分中的结论相矛盾。

综上所述， $v_{th} = c$ 。

我们来考察 $v_{th}$ 在不同参照系之间的变换。考虑参考系 $F'$ 相对于参考系 $F$ ，以速度 $v'$ 沿 $x$ 轴运动。则在参考系 $F'$ 中，这个阈值速度 $v'_{th}$ 变为

$$v'_{th} = \frac{c - v'}{1 - v'/c} = c \quad (16)$$

因此， $c$ 在所有惯性参考系中都是不变的。证明完毕。

**推论(IV)：**当 $|E| < |B|$ 时，电荷漂移速度 $v_q < c$ ，是“物理”的。此时，磁漂移速度 $v_g > c$ ，是“非物理”的。同理，当 $|E| > |B|$ 时，磁漂移速度 $v_g < c$ 是物理的，而电漂移速度 $v_q > c$ 是非物理的。

## 6 电磁场及时空坐标的洛伦兹变换

对于在参照系 $F$ 和 $F'$ 之间的电磁场变换(10)式，可以进一步把各个矩阵元都确定下来。定义 $L = E_y^2 - B_z^2$ ，这是对于(1)式所描述的正交电磁场的拉格朗日量。根据(10)、(11)、(12)式，我们得到在参考系 $F'$ 中：

$$L' = E_y'^2 - B_z'^2 = \lambda(|v'|)L \quad (17)$$

其中 $\lambda(|v'|) = a^2(1 - \beta'^2)$ 。通过类似于(8)式的推导，可以得出 $\lambda^2 = 1$ ，乃至 $\lambda = 1$ ，即：

$$a = \gamma' = (1 - \beta'^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

总结一下，我们现在可以完整地写出横向电磁场 $E_y, B_z$ 之间的变换，

$$\begin{pmatrix} E_y' \\ B_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma'\beta' \\ -\gamma'\beta' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (19)$$

把上述正交电磁场绕 $x$ 轴旋转 $90^\circ$ ，

则得到

$$\begin{pmatrix} E'_z \\ B'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & \gamma'\beta' \\ \gamma'\beta' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ B_y \end{pmatrix}. \quad (20)$$

至此, 公式(9)、(19)、(20)完全给出了电磁场的各个分量在两个惯性系之间的变换关系, 其中 $\gamma' = (1 - \beta'^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\beta' = v'/c$ ,  $v'$ 是 $F'$ 参考系相对于 $F$ 参考系的速度。

下面我们根据速度迭加公式(16), 来推导时空间隔 $(\Delta x, c\Delta t)$ 在两个惯性参照系 $F$ 和 $F'$ 之间的变换:

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ c\Delta t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ f & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ c\Delta t \end{pmatrix}. \quad (21)$$

根据(21)式, 可以得出相应的速度迭加公式,

$$\frac{u}{c} = \frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = \frac{a}{d} \frac{\beta + b/a}{1 + \frac{f}{d}\beta}.$$

## 参考文献

- [1] Einstein A. Annalen der Physik., 1905, 322 (10):891C921
- [2] 金晓峰. 庞加莱的狭义相对论(1—5), 物理, 2022, 51(3)—2023, 52(1)
- [3] Kittel C, Knight W D, Ruderman M A et al. Mechanics (Berkeley Physics Course, Vol. 1), 2nd edition. McGraw-Hill Book Company, 1973
- [4] Feynman R P. The Feynman Lectures on Physics Vol. I. Basic Books, New Millenium ed. edition, 2011
- [5] Purcell E M. Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, Vol 2, 2<sup>nd</sup> edition. McGraw-Hill Book Company, 1984
- [6] Mermin N D. Am. J. Phys., 1984, 52: 119
- [7] Singh S. Am. J. Phys., 1986, 54: 183
- [8] Pelissetto A, Testa M. Am. J. Phys., 2015, 83: 338
- [9] Cabrera B. Phys. Rev. Lett., 1982, 48: 1378
- [10] Rajantie A. Physics Today, 2016, 69 (10):40
- [11] Dirac P A M. Proc. R. Soc. London Ser. A, 1931, 133:60
- [12] Schwinger J. Phys. Rev., 1968, 173: 1536
- [13] Yang C N. Annals of the New York Academy of Sciences, 1977, 294:86
- [14] Jackson J. D. Classical Electrodynamics, 3rd edition. Wiley, 1998

与(15)式相对比, 得出 $a = d$ ,  $\frac{b}{a} = -\beta'$ ,  $\frac{f}{d} = -\beta'$ 。

再定义时空间隔的平方,  $\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2$ 。根据光速不变性, 如果 $(\Delta s)^2 = 0$ , 则 $(\Delta s')^2 = 0$ 。因此, 对于无限小的非零时空间隔, 有 $(\Delta s')^2 = \lambda(\Delta s)^2$ , 其中 $\lambda$ 是一个因子。通过类似于推导公式(18)的推理, 得出 $\lambda = 1$ , 以及时空间隔的相对论变换关系:

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ c\Delta t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma'\beta' \\ -\gamma'\beta' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ c\Delta t \end{pmatrix}. \quad (22)$$

这就是著名的时空坐标间隔的洛伦兹变换。

## 7 结论

我们提供了一种新的电磁场和

时空坐标相对论变换的推导方法。在正交电磁场位形下, 研究电荷和磁单极子的漂移速度在不同的惯性参考系下变换, 我们得出了与标准教材相同的结果。然而, 我们并未假设光速不可超越及光速不变, 而是将其作为“物理”的漂移速度的上限而得出。这些结果清楚地表明, 相对论的起源深深植根于电磁学。即使是如此简单的漂移速度现象, 也与伽利略时空变换不相容, 这表明相对论是非常自然的。

**致谢** 感谢俄亥俄州立大学何天伦教授、复旦大学金晓峰教授的鼓励, 西湖大学王越同学在稿件编辑上的帮助。

## 读者和编者

## 《物理》有奖征集封面素材

为充分体现物理科学的独特之美, 本刊编辑部欢迎广大读者和作者踊跃投寄与物理学相关的封面素材。要求图片清晰, 色泽饱满, 富有较强的视觉冲击力和很好的物理科学内涵。

一经选用, 均有稿酬并赠阅该年度《物理》杂志。

请将封面素材以附件形式发至: physics@iphy.ac.cn; 联系电话: 010-82649029。

《物理》编辑部