

从漂移速度到相对论时空变换(II)*

俞逸骁¹ 吴从军^{2,†}

(1 西湖大学本科生书院 杭州 310024)

(2 西湖大学物理系 新基石科学实验室 杭州 310024)

2025-06-20收到

† email: wucongjun@westlake.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20250809

CSTR: 32040.14.wl20250809

文章从电磁学的基础理论出发,考察电荷和电流环(磁偶极)在正交电磁场中的漂移速度,即做匀速直线运动时的速度,以及漂移速度在不同惯性参照系之间的变换关系。由此可以论证,可以实现的速度(简称物理速度)必定存在一个普适的上限。简单地说,电荷和电流环的漂移速度的乘积是个普适的常量,我们将其定义为 c^2 。这两个漂移速度不可能都是物理上可以实现的,否则就会出现这样的矛盾:在一个惯性参照系中的匀速直线运动,在另外一个惯性参照系中变成了加速运动。可以论证,在这两个漂移速度之中,小于 c 的那个可以在物理上被实现,而大于 c 的那个则不能。这表明 c 是物理速度的上限,由此可以建立相对论性的电磁场和时空坐标的洛伦兹变换。原则上, c 的值可以通过测量电荷和电流在稳恒电磁场中的受力来确定。真空中的光速值正好与 c 相同。下文中的论证并不需要以电磁感应和位移电流等动态电磁场的性质为前提。

1 引言

狭义相对论由爱因斯坦^[1]、庞加莱^[2]、洛伦兹等人在20世纪初建立,已经成为现代物理学的基石之一。一般说来,狭义相对论的前提有两个公设(postulate)。其一是相对性原理,即基本的物理定律在所有惯性参照系里都是相同的。(为表述方便,下文中有时将惯性参照系简称为参照系。)其二是光速不变原理,即光的传播速度在各个惯性系里都是相同的。在这两条公设的前提下,可以推导出时空坐标的洛伦兹变换,得出光速是物理速度的上限。光速也可以被解释成相互作用传播速度的上限。

相对性原理是合乎情理的,早在伽利略时代就被提出。当然,伽利略所针对的是力学现象。他指出,在湖面上的一艘大船中,如果只是观察船舱内蝴蝶的飞行,那是不能判断船是静止还是匀速直线地

行驶于湖面之上的,除非观察者打开窗户向外看一看^[3]。牛顿运动定律在所有惯性参照系中都是相同的,没有哪一个惯性参照系会比另外一个更特殊。如果在一个参照系里,一个粒子做匀速直线运动,所受的合力为零,则在另外一个参照系里观察,它也在做匀速直线运动,所受的合力也为零。

“光速不变”则是另外一回事。当然对于很多资深物理学研究者来说,“光速不变”是常识,见怪不怪。但是对于初学者来说,“光速不变”就显得非常不自然,是理解相对论的最大困扰。在日常经验中,池塘里面水波的波速就依赖于惯性系的选择。把池塘本身当作参照系,我们写下水波的波动方程,可以得到其波速。另一方面,我们也可以采用从岸边驶过的一列火车为参照系,这样就要对水波方程和波速进行时空坐标的变换。不论用伽利略变换还是洛伦兹变换,水波方程和波速都发生了变化。凭什么说光波比水波要特殊呢?

在教材里面,通常采取下面这样的讲法。迈克耳孙—莫雷实验发现:从固定在地面上的光源发出的光,其速度并不依赖于地球相对于以太的运动,这样的实验事实否定了以太的存在。给人的印象是,光速不变完全是基于迈克耳孙—莫雷等实验的结论。

还有一种常见的观点认为,相对性原理应该包括电磁学规律。这样的话,麦克斯韦方程(Maxwell equations)的成立就不依赖于惯性参照系的选择。既然光速由麦克斯韦方程给出,那光速不变就是相对性原理的推论而已。

这样说固然没有错,但是过于简化了物理学史上的艰难历程。“麦克斯韦方程不依赖于惯性系的选择”的观念,并不是一开始就被物理学家们所接受的。麦克斯韦最初是把位移电流建立在类似于分子介质的图像之上的。他把磁场想象成介质中的一种涡旋^[4]。当麦克斯韦把位移电流推广到真空时,他保留了其数学形式,而放弃了其力学模

* 国家自然科学基金(批准号:12234016)、新基石科学基金资助项目

型。可见在当时，很难让人相信麦克斯韦方程和水波方程有什么本质的差别。

事实上，麦克斯韦本人认可“以太”的存在，认为他给出的光速是相对于“以太”而言的。在19世纪末和20世纪初，物理学界对“以太”的存在进行了长期的争论，后来才被迈克耳孙—莫雷实验所否定。因此，在教学中对“光速不变”进行深入的思辨，是有必要的。

在文献中，已经有绕开“光速不变”，仅从相对性原理出发，重新推导相对论的工作^[5-8]。它们的特点是基于时空的均匀性和空间的各向同性，把参照系之间的时空变换视为对称群操作。基于群操作之间自洽性(self-consistency)的要求，可以得到一个带速度平方倒数纲的常量，它可以取任意实数值，记作 $K = \pm 1/c^2$ 。根据 K 为正、零、负三种情况，时空变换群可以被划分成双曲、抛物、椭圆三种类型，分别对应于洛伦兹、伽利略和旋转等三类时空变换。旋转变换因为违反了因果关系(causality)，应当被排除。伽利略变换($K = 0$)和洛伦兹变换($K > 0$)，都是满足因果关系的。

可见“光速”只是一个习惯性的叫法，并不本质。重要的是，要存在一个不依赖于参照系选择的速度常量 $c = 1/\sqrt{K}$ ，它是物理速度的上限。伽利略变换相当于洛伦兹变换在 $c \rightarrow \infty$ 下的极限。

文献[5—8]中的讨论，是局限在力学范围的。这样就无法回答：怎么来决定 c 的取值？如果只就力学现象而言，我们无法排除掉 $c \rightarrow \infty$ 的可能。即便测得某个相互作用以有限的速度传播，也不能排除存在瞬时相互作用的可能。瞬时相互作用的存在并不会带来力学框

架在理论上的困难。当然， c 也可以取一个有限值，这就是洛伦兹变换，也就设定了物理上可以实现的速度上限。但是在力学的框架下，并没有理由要求时空变换是伽利略型的或者是洛伦兹型的。

要论证物理速度存在一个普适的上限，需要把力学和电磁学结合起来。本文作者之一曾从基础电磁学的角度来引入狭义相对论^[9]。方法是考察电荷和磁荷的漂移速度在参照系下的变换。如果一个带电荷或磁荷的粒子，在正交电磁场中所受到的合力为零，保持静止或匀速直线运动，则称之为漂移运动。请注意，作者对于“漂移速度”这个术语，沿用了加速器物理和凝聚态物理霍尔效应研究中的习惯。

在一个惯性系中的漂移运动，在另外一个参照系看也应该是漂移运动，该粒子受到的电磁合力也应该为零。我们发现这个简单的事实和伽利略时空观存在本质的矛盾，由此得出物理的漂移速度存在一个普适的上限 c 。要得到这样的结论，其实不需要事先知道麦克斯韦方程，也不需要知道电磁波的存在。如果该上限不存在的话，则会出现违反相对性原理的情况：一个电荷或者磁荷在一个参照系中做静止或匀速直线漂移运动，而在另外一个惯性系看则是加速运动。

然而，文献[9]中的论证需要假设磁单极的存在，并且使用了磁单极在电磁场中的静磁力和电洛伦兹力公式，显得说服力不足。虽然磁单极和现有的电磁学理论是兼容的，但是磁单极的存在还没有公认的实验证据。

如果能够在不假定磁单极存在的情况下，论证物理的漂移速度存在上限，那将是有意义的。本文作

为文献[9]的续篇，通过考察电荷和电流环(磁偶极)在正交电磁场中的漂移速度，同样可以得出物理的漂移速度存在着上限 c 的结论。进一步地，根据文献[9]中的方法，可以推导出相对论的速度叠加公式、电磁场和时空坐标的洛伦兹变换。

本文需要关于稳恒电磁场的麦克斯韦方程作为先验知识，但是不需要事先知道法拉第电磁感应定律和麦克斯韦位移电流。物理速度的上限 c 可以通过在稳恒电磁场中的受力测量来确定(见下文公式(9)以及相关段落的讨论)，并不需要电磁波的知识。如果把完整的麦克斯韦方程作为先验，那么容易得出电磁波的传播速度正好就是 c 。

回过头来看会发现，建立相对论的知识储备，其实在比较早的时期就已经完备了。关于稳恒电磁场的知识建立在麦克斯韦时代之前。洛伦兹力公式(下文(2)式)是在1895年被正式提出的。也有证据说早在1865年，麦克斯韦已经推导了该公式^[10]。另一方面，安培力是在1820年代被发现的。如果认为电流是由于电荷的运动引起的，则不难从安培力推导出单个电荷所受的洛伦兹力。从更为基础的观点，洛伦兹力公式可以视为对磁场的定义，即通过电荷受力对速度的依赖来定义磁场。在下文2.2节中，对洛伦兹力公式进行了基于对称性和能量守恒的论证。

本文以下的部分按这样来安排。在第2节中，我们详细解释下文推导所需要的前提，并构造一个带速度量纲的常量 c 。在第3节中，考察在正交电磁场中电荷和电流环(磁偶极)的漂移速度，以及它们在不同参照系之间的变换，由此论证物理上可实现的速度上限就是 c 。

在第4节中,对在时间上稳恒但空间上不均匀的电磁场进行参照系变换,可以演示法拉第电磁感应和位移电流存在的必要性。在第5节中,对全文进行总结。在附录A里,介绍磁、电偶极矩在时空对称性变换下的性质。在附录B里,我们对在正交电磁场中运动的电流环,做相对论性的受力分析。

2 论证的前提

下面的论述不需要引入磁单极,而将采用磁偶极。磁偶极可以用小电流环来实现。我们来清点并解释下文推导中所需要的前提。

(1) 相对性原理——弱版本

我们只需要用到比较弱的相对性原理。

在力学方面,我们要用到以下结论。如果一个粒子在惯性参照系F中,处于静止或匀速直线运动状态,那么在任何一个惯性参照系F'中,它也仍然是静止或匀速直线运动状态。如果将粒子换成一个有限大小的物体,它在惯性参照系F中保持静止或者做匀速直线平动,那么在任何一个惯性参照系F'中,它也仍然处于静止或匀速直线的平动状态。

在电磁学方面,我们需要假设对稳恒电磁场的麦克斯韦方程在所有惯性参照系中都成立,包括电场和磁场的高斯定律(Gauss's law)(下文公式(4),(5))、稳恒电流的安培定律(Ampère's law)(下文公式(6))。我们不要求事先了解麦克斯韦方程的动态部分,包括法拉第电磁感应、麦克斯韦位移电流,以及电磁波传播的知识。

(2) 电荷在电磁场中的受力

我们先解决一个检验电荷 q 在

电磁场中受力的定义问题。电荷 q 在电磁场中受到的力 $\mathbf{F}$,可以分解成与 q 的运动速度 v 无关的部分 $\mathbf{F}_E$,以及与 v 线性依赖的部分 $\mathbf{F}_L$ 。我们将采用高斯单位制。在此电磁单位制中,电场和磁场的地位相等。

$\mathbf{F}_E$ 的表达式如下,

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}, \quad (1)$$

(1)式可视为电场 $\mathbf{E}$ 的定义,原则上可以通过测量静止的检验电荷 q 的受力来得到。

$\mathbf{F}_L$ 为磁力,一般称之为洛伦兹力,其表达式如下,

$$\mathbf{F}_L = q \frac{v}{c_1} \times \tilde{\mathbf{B}}. \quad (2)$$

在(2)式中, c_1 只是一个带速度量纲的量。它的不同取值可以被 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的收缩所吸收,只要保持它们之间的比值不变即可。这相当于不同电磁单位制的选择。

基于对称性和能量守恒,我们不难分析出带电粒子所受的洛伦兹力的形式。 $\mathbf{F}_L$ 可以视为对速度的线性响应。原则上,它可以被写成,

$$F_{L,i} = \chi_{ij} v_j. \quad (3)$$

χ_{ij} 是二阶张量,可以被分解成对称部分 χ_{ij}^s 和反对称部分 χ_{ij}^A 之和。其中的对称部分 χ_{ij}^s 可以被对角化,得到其主轴 $\hat{e}_i (i=1,2,3)$ 以及相应的本征值 γ_i 。当速度沿着主轴时,由 χ_{ij}^s 给出的力为 $\mathbf{F}_L^s = \gamma_i \hat{e}_i$ 。取决于 γ_i 的正负,该项会带来能量的增益或耗散,从而违反了真空中的能量守恒。因此 χ_{ij} 必须是完全反对称的。我们可以把 χ_{ij} 表示成赝矢量的形式: $\chi_{ij} = \epsilon_{ijk} \tilde{B}_k / c_1$,这就得到了(2)式。

我们需要如下的电磁学基础知识。

(3) 电场和磁场的高斯定律:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi Q, \quad (4)$$

$$\oint \tilde{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (5)$$

电荷 Q 是相对论不变量,不依赖于参照系的选择。

(4) 安培定律:

$$\oint \tilde{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c_2} I, \quad (6)$$

其中 c_2 是一个带速度量纲的常量。

(2)式和(6)式中所出现的速度 c_1 和 c_2 均依赖于电磁单位制的选择,并不具有单独的物理意义。容易得到, $c_1 c_2$ 是一个和电磁单位制无关的量,由此定义 $c = \sqrt{c_1 c_2}$ 。

为了简化讨论,我们设 $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$,则有:

$$\mathbf{F}_L = q \frac{v}{c} \times \mathbf{B}, \quad (7)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (8)$$

(7)式和(8)式是洛伦兹力和安培定律在高斯单位制中通常的形式。

目前, c 也还只是一个带速度量纲的常量而已,还不具备物理速度普适上限的含义。在原则上, c 是实验可测的。考虑两块无限大平行金属板。如果它们分别带面电荷密度 $\pm\sigma$,并且没有电流的话,则极板单位面积上所受的吸引力为 $P_E = 2\pi\sigma^2$ 。另一方面,如果两块极板上分别通过面电流密度 $\pm K$,而且电荷密度为零的话,则极板单位面积上所受的排斥力为 $P_B = 2\pi K^2 / c^2$ 。我们有:

$$\frac{K^2}{\sigma^2} \frac{P_E}{P_B} = c^2, \quad (9)$$

这样定出来的 c 和电磁单位制的选取无关。如果采用SI单位制, $\frac{K^2}{\sigma^2} \frac{P_E}{P_B} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$,得到的结果是同样的。推导作为练习留给读者。

3 对物理速度上限的推导

本节中将要用到一些准备知识, 请参阅附录 A。例如, 极矢量和轴矢量的概念、电磁场的对称性, 磁偶极矩和电偶极矩的对称性等。

设在参照系 F 中, 在 $y = \pm d$ 处放置两块平行于 zx 平面的无限大平行板(图 1), 以恒定速度 v 沿着 $\hat{x}$ 方向运动。在 F 中测得两块平行板的面电荷密度分别为 $\pm\sigma$ 。则平行板上电荷的运动产生沿着 $\hat{x}$ 方向的面电流, 面电流密度分别为 $\pm K$, 其中 $K = \sigma v$ 。

这些电荷和电流的分布会产生稳恒的电场和磁场, 下面根据对称性来论证它们的方向。

该系统在关于 xy 面的镜面反射 σ_{xy} 下不变。磁场 $\mathbf{B}$ 是轴矢量, 其分量 (B_x, B_y, B_z) 在 σ_{xy} 操作下, 变成 $(-B_x, -B_y, B_z)$, 因此 $B_x = B_y = 0$, 只有 B_z 能保持不变, 即 $\mathbf{B}$ 沿着 $\hat{z}$ 方向。电场 $\mathbf{E}$ 是极矢量, 在 σ_{xy} 镜面反射下变成 $(E_x, E_y, -E_z)$, 因此 $E_z = 0$ 。

该系统在关于 yz 面的镜面反射 σ_{yz} 和时间反演的复合操作下不变。在实施 σ_{yz} 操作后, 平行板的运动反向, 时间反演变换再把运动方向恢复。电场 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ 在此变换下成为 $(-E_x, E_y, 0)$, 因此 $E_x = 0$ 。只有 E_y 保持不变, 因此 $\mathbf{E}$ 只能沿着 $\hat{y}$ 方向。

经过简单的对称性分析可知, E_y 和 B_z 只在两层极板之间的空间非零而且均匀分布, 它们在两层极板之外的空间中为零。论证的过程作为练习, 留给读者。

根据高斯定律, 经过简单的对称性分析可以得到,

$$E_y = 4\pi\sigma. \quad (10)$$

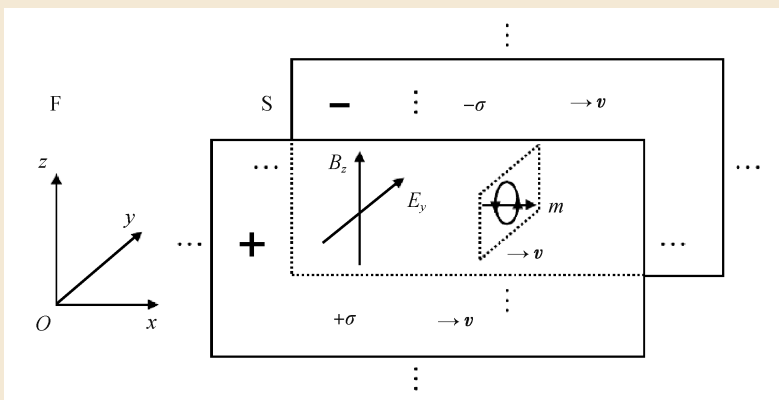


图 1 在惯性参照系 F 中, 两块无限大平行板(平行于 zx 面)放置在 $y = \pm d$ 处, 分别带面电荷 $\pm\sigma$ 。它们以速度 v 沿着 $\hat{x}$ 方向运动。该设置产生了稳恒的正交电磁场 $\mathbf{E} = 4\pi\sigma\hat{y}$ 和 $\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} K\hat{z}$, 其中 $K = \sigma v$ 是面电流密度。S 是跟随平行板运动的随动参照系。一个均匀的电环, 其法线沿着 $\hat{x}$ 方向, 以速度 v 沿着 $\hat{x}$ 方向运动。该电流环在 S 中是静止的

根据安培定律可以得出,

$$B_z = \frac{4\pi}{c} K. \quad (11)$$

电场和磁场的方向彼此正交, 它们通过平行板的运动速度相联系,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (12)$$

在参照系 F 中, 放置一个均匀的圆形电流环。该电流环平面的法线沿着 $\hat{x}$ 方向, 具有绕 x 轴的转动对称性, 并且和平板以同样的速度 v 运动。在参照系 F 中, 电流环是电中性的, 其电偶极矩 $\mathbf{p} = 0$ 。该电流环的磁偶极矩沿着 $\hat{x}$ 方向, 即 $\mathbf{m} \parallel \hat{x}$ 。

考虑平行板的随动参照系 S, 它相对于 F 系以速度 v 沿着 $\hat{x}$ 方向运动。在参照系 S 中, 两块平行板是静止的, 所以不携带电流, 因此平行板间的磁场为零, 只可能产生静电场 $\mathbf{E}_s$ 。该电流环在参照系 S 中也保持静止, 没有静电荷。根据在附录 A 中的推论(II), 在参照系 S 中该电流环的电偶极矩 $\mathbf{p}_s = 0$, 并且磁偶极矩 $\mathbf{m}_s \parallel \hat{x}$ 。因此, 它不受到力和力矩, 处于静止的平衡状态。

根据惯性系之间的变换, 在参照系 F 中, 该电流环处于匀速直线

运动的平动状态, 即以速度 v 在做漂移运动。本文下面的论证不依赖该电流环的受力细节。当然为了理论体系的完整和自洽性, 在建立相对论之后, 我们也给出该电流环的受力分析(详见附录 B)。

在参照系 F 中, 放入一个检验电荷 q , 可以形式上定义电荷 q 的漂移速度,

$$\frac{v_q}{c} = \frac{E_y}{B_z} = \frac{c}{v}. \quad (13)$$

采用和文献[9]中相同的方法, 可以论证 v_q 是非物理的, 简介如下。如果 v_q 是物理的话, 那么在参照系 F 中, 电荷 q 所受到的电力和洛伦兹力相平衡, 做匀速直线运动。则在参照系 S 中, 它也应该保持匀速直线运动, 但是该系中的磁场为零而电场 $\mathbf{E}_s$ 非零, 这会导致电荷加速。加速度是不能通过惯性参照系变换而消除的。这就导致了矛盾。

根据文献[9]中第 3 节的论证, 物理上可以实现的速度, 应该存在一个有限的阈值 v_{th} 。小于 v_{th} 的速度是可以实现的, 即物理的; 而大于 v_{th} 的速度是不可以实现的, 也就是非物理的。如果不存在这样一个有

限的速度阈值的话, 电荷和电流环的漂移速度就都是物理的了, 这和上述的论证矛盾。

电流环的漂移速度 v 和平行板的运动速度相同, 因而是物理的。可以得到,

$$v < v_{th} < v_q = c^2/v. \quad (14)$$

请注意, 到目前为止, 我们还没有确定 v_{th} 和 c 的关系。

在文献[9]的第4节中, 通过研究电荷和磁单极在正交电磁场中的漂移速度及其参照系变换, 推导出了相对论性的速度叠加公式。现在不引入磁单极, 而通过研究电流环(磁偶极矩)的漂移运动, 也可以达到相同的目标。简介如下。

考虑两个惯性参照系 F 和 F' , 其中 F' 相对于 F 沿着 x 轴以速度 v' 运动, 则 v' 是物理上可以实现的。设在参照系 F 中, 一个粒子沿着 x 轴以物理速度 v 运动, 则 $v < v_{th}$ 。设该速度在参照系 F' 中的值为 u 。

通过选取不同的正交电磁场位形, v 可以作为一个电流环的漂移速度来实现, 也可以作为一个电荷的漂移速度来实现。先考虑电流环, 其法线沿着 x 轴。根据本节上面的论述, 取正交电磁场位形满足 $\frac{B_z}{E_y} = \frac{v}{c} = \beta$ 就可以了。在另一方面, 如果设置正交电磁场位形为 $\frac{E_y}{B_z} = \frac{v}{c} = \beta$, 根据电荷在电磁场中的受力公式(1)和(7), 则电荷 q 以速度 v 做漂移运动。

通过和文献[9]第4节中同样的推理, 我们得到,

$$\frac{u}{c} = \frac{\beta - \beta'}{1 - \beta\beta'}, \quad (15)$$

其中 $\beta' = v'/c$ 。文献[9]中的推导依据是: 如果一个电荷或者磁单极在正交电磁场中做物理的漂移运动,

则该运动在惯性参照系变换下, 仍然为物理的漂移速度。它们所受的电磁合力应该为零。现在, 我们把磁单极替换成法线沿着 $\hat{x}$ 方向的电流环即可。

文献[9]的第5节中论证了物理速度的上限 $v_{th} = c$ 。此处简单介绍一下其证明的要点。考虑两个物理的速度, 即 $v < v_{th}$, $v' < v_{th}$ 。对它们进行速度叠加的结果 u , 应该也是物理的, 即 $u < v_{th}$ 。这个要求使得 $v_{th} < c$ 为不可能, 否则两个物理的速度在叠加后, 会出现 $u > v_{th}$ 这样的矛盾。

另一方面, $v_{th} > c$ 也是不可能的。否则根据(14)式, 取电流环的漂移速度 v 使得 $v_{th} > v > c$, 则电荷漂移速度 v_q 满足 $v_{th} > v_q = c^2/v$, 从而 v 和 v_q 在物理上都是可以实现的。但是根据上面的结论, 这是不可能的。因此, 我们得到 $v_{th} = c$ 。

根据(15)式, 可以得到 c 在与任何物理速度 v 的叠加下不变: 代入 $\beta = 1$, 则 $u = c$ 。也就是说 c 和惯性参照系的选择无关。在文献[9]的第6节和第7节中, 作者之一进一步推导了电磁场和时空坐标的洛伦兹变换, 就不在这里赘述了。

在洛伦兹变换的基础上, 可以进一步研究相对论动力学。定义力为 $F = dp/dt$, 其中 $p = m_0 dr/d\tau$ 以及 m_0 是静止质量, τ 是在粒子随动参照系中的原时。由此可以导出力的相对论变换公式, 以及质能关系。这些过程和通常的教材是一致的, 不再重复。

可以把电磁场在参照系 F 和 F' 之间的变换关系, 总结成下面方便的形式,

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \\ E'_{\perp} &= \gamma(E_{\perp} + \frac{v'}{c} \times B_{\perp}), \end{aligned}$$

$$B'_{\perp} = \gamma(B_{\perp} - \frac{v'}{c} \times E_{\perp}). \quad (16)$$

其中 v' 是参照系 F' 相对于 F 的速度, $\parallel$ 和 $\perp$ 代表纵向和横向两个方向, 即平行和垂直于 v' 的方向。特别地, 如果在参照系 F' 系中电场为零, 则在 F 系中有,

$$E_{\perp} = -\frac{v'}{c} \times B_{\perp}. \quad (17)$$

如果在参照系 F' 系中磁场为零, 则在 F 系中有,

$$B_{\perp} = \frac{v'}{c} \times E_{\perp}. \quad (18)$$

4 相对性原理与麦克斯韦方程

目前, 我们已经建立了电磁场和时空坐标的洛伦兹变换。在这个过程中, 只用到了麦克斯韦方程中针对稳恒电磁场和稳恒电流的部分, 并假设了它们在所有的惯性系下都成立。 c 是从洛伦兹力公式(7)和稳恒电磁场的安培定律公式(8)而来。在论证 c 是物理速度的上限的过程中, 并不需要和电磁波的传播建立联系。

要研究动态电磁场, 则需要对稳恒场的麦克斯韦方程进行扩充。电、磁场的高斯定律(公式(4)、(5)), 虽然在形式上不需要被改变, 但是其物理含义已经扩充到动态电磁场。此外, 还有法拉第电磁感应定律,

$$\oint E \cdot dl = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint B \cdot dA. \quad (19)$$

对安培定律(公式(8))的扩充则要加上位移电流的贡献,

$$\begin{aligned} \oint B \cdot dl \\ = \frac{4\pi}{c} I + \frac{\partial}{\partial t} \oint E \cdot dA. \end{aligned} \quad (20)$$

完整的麦克斯韦方程当然不是逻辑推理的结果。尽管如此, 力学版本的相对性原理, 也要求完整的麦克斯韦方程中出现法拉第电磁感

应和位移电流的贡献。下面我们来演示一下。

(1) 法拉第电磁感应定律

在惯性参照系F中，考虑一个法线沿着 $\hat{x}$ 方向的小电流环，其磁偶极矩 $\mathbf{m} \parallel \hat{x}$ ，以速度 v 沿着 $\hat{x}$ 方向运动。以通过电流环中心的法线为 x 轴，建立柱坐标，定义轴向 $\hat{x}$ 、径向 $\hat{e}_r$ 、绕着 x 轴的环向为 $\hat{e}_\theta$ ，如图2(a)所示。

根据对称性分析可知，电流环产生的磁场 $\mathbf{B}$ 呈绕 x 轴的对称分布。设磁场的轴向、径向、环向各分量为 (B_x, B_r, B_θ) 。如图2(a)所示，取一个圆环，其轴线沿着 $\hat{x}$ 方向，半径为 r ，在 x 轴上的截距为 x 。根据公式(17)，电场的轴向分量为零，即 $E_x = 0$ 。如果环向 $B_\theta \neq 0$ 的话，则电场会有径向分量，即 $E_r \neq 0$ 。因此，电场对该圆柱面的电通量非零。这违反了高斯定律，从而 $B_\theta = 0$ ， $E_r = 0$ 。

把上述圆环平移 Δx ，与其初始位置构成一个薄圆柱的底面。磁场对该圆柱面的通量为零，即：

$$2\pi r B_r \Delta x + \iint (B_x(x_q + \Delta x, t) - B_x(x_q, t)) dA = 0,$$

其中 dA 是对圆柱横截面的积分。则有

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \iint \frac{\partial B_x}{\partial x} dA. \text{ 由公式(17)}$$

可得，环向的电场 $E_\theta = -\frac{v}{c} B_r$ ，即：

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{v}{2\pi cr} \iint \frac{\partial B_x}{\partial x} dA \\ &= -\frac{1}{2\pi cr} \iint \frac{\partial B_x}{\partial t} dA. \end{aligned} \quad (21)$$

在(21)式的最后一步中出现了负号，这是因为在F参照系中，电、磁场 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 对时空的依赖以 $x - vt$ 的形式出现，有 $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{v \partial t}$ 。沿着圆环的边缘对 E_θ 做线积分，即可得出法拉第电磁感应定律(19)式。

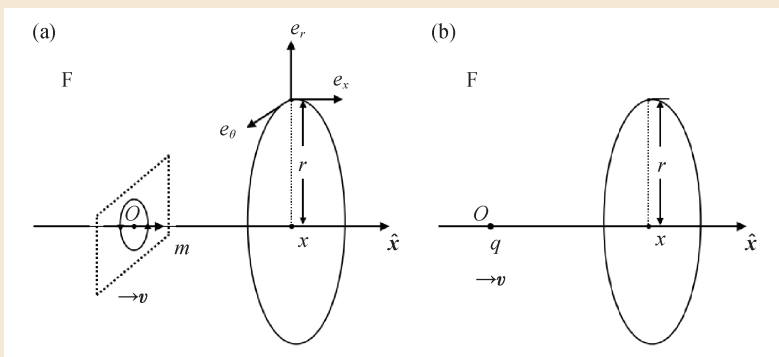


图2 (a)在惯性参照系F中，法线指向 $\hat{x}$ 的电流环以速度 v 沿着 $\hat{x}$ 方向运动，考虑电场沿着半径为 r 截距在 x 处的圆环的积分；(b)电荷 q 以速度 v 沿着 $\hat{x}$ 方向运动，考虑磁场沿着半径为 r 截距在 x 处的圆环的积分

(2) 位移电流

在参照系F中，如图2(b)中所示，以电荷 q 的运动轨迹为 x 轴，建立柱坐标，定义轴向 $\hat{x}$ ，径向 $\hat{e}_r$ ，环向为 $\hat{e}_\theta$ ，电荷 q 产生的电场呈绕 x 轴的对称分布，并设电场的三个分量为 (E_x, E_r, E_θ) 。类似的，取一个圆环，其在轴上的截距为 x 。设想把该圆环平移 Δx ，与其初始位置构成一个薄圆柱的底面。设电荷 q 不在这个圆柱之中，则通过该圆柱底面及侧面的电通量为零。通过和上文类似的推理，得到径向电场 $E_r = -\frac{1}{2\pi r} \iint \frac{\partial E_x}{\partial x} dA$ 。根据(18)式，伴随这个径向电场 E_r 存在环向磁场 $B_\theta = \frac{v}{c} E_r$ 。则有，

$$\begin{aligned} B_\theta &= -\frac{v}{2\pi rc} \iint \frac{\partial E_x}{\partial x} dA \\ &= \frac{1}{2\pi rc} \iint \frac{\partial E_x}{\partial t} dA. \end{aligned} \quad (23)$$

沿着圆环的边缘对 B_θ 做线积分，就得到(20)式中位移电流的贡献。

5 总结

我们提供了一种基于基础电磁学来论证相对论时空变换的方法。在一个正交电磁场中，电荷和电流环(磁偶极)的漂移速度不可能都是

物理上可实现的，否则将会出现在一个参照系中的匀速直线运动，在另一个参照系中变成了加速运动的情况。由此可以论证，在物理上可以实现的速度存在着一个普适上限 c ，它的值在原则上可以通过电荷和电流在稳恒电磁场中的受力来测量。

本文中的论证不需要以动态电磁场的法拉第电磁感应定律和麦克斯韦位移电流为前提，只需要如下很少的前提知识：

(1) 在一个惯性参照系下做匀速直线运动的粒子，在另外一个惯性参照系下也做匀速直线运动。

(2) 带电粒子在电磁场中所受到的电力公式和洛伦兹力公式。公式(1)和(7)可以视为电场和磁场的定义。

(3) 稳恒电、磁场的高斯定律以及稳恒电流的安培定律。它们在所有惯性参照系中都成立。

在相对论诞生120周年之际，我们对相对论进行重新思考并梳理其基础。我们认为以这种方式来纪念和表达对他们的致敬，是很有意义的。

致谢 感谢复旦大学金晓峰教授的鼓励。

参考文献

[1] Einstein A. Annalen der Physik, 1905, 322 (10):891C921

[2] 金晓峰. 庞加莱的狭义相对论(1—5). 物理, 2022, 51(3)—2023, 52(1)

[3] 伽利略. 关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话. 上海: 上海人民出版社, 1974

[4] Yang C N. Physics Today, 2014, 67 (11):45

[5] Ignatowsky W V. Physikalische Zeitschrift, 1910, 11:972

[6] Mermin N D. Am. J. Phys., 1984, 52:119

[7] Singh S. Am. J. Phys., 1986, 54:183

[8] Pelissetto A, Testa M. Am. J. Phys., 2015, 83:338

[9] 吴从军. 物理, 2025, 54(2):128

[10] Lorentz force. https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_force#cite_note-FOOTNOTENahin2002-5

[11] Griffith D J. Introduction to Electrodynamics. Cambridge University Press, 2017. p.520

附录A：磁偶极矩和电偶极矩的对称性

我们介绍一些背景知识。电场 $\boldsymbol{E}$ 和坐标类似，属于极矢量，而磁场 $\boldsymbol{B}$ 和角动量类似，属于轴矢量。更准确地说，轴矢量是二阶反对称张量，在三维空间中可以表达成两个极矢量的叉乘。极矢量和轴矢量在空间旋转操作下的变换性质是一样的，但是它们在镜面反射操作下的变换性质则是相反的。对于极矢量来说，其平行于镜面的分量在反射下不变，而其垂直于镜面的分量在反射下反向；对于轴矢量来说，其平行于镜面的分量在反射下反向，而垂直于镜面的分量在反射下不变。根据(1)式和(2)式，可得电磁场在时间反演下的变换性质。在时间反演变换下，力不变而速度反号，则 $\boldsymbol{E}$ 在时间反演不变而 $\boldsymbol{B}$ 反号。

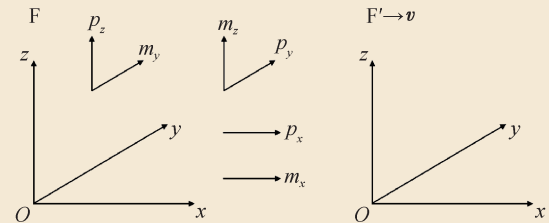
因为磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 产生磁场，而电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 产生电场。根据电磁场在镜面反射和时间反演下的变换性质，可以得出，磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 是轴矢量和电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 是极矢量。在时间反演变换下 $\boldsymbol{m}$ 反号，而 $\boldsymbol{p}$ 不变。

磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 和电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的值依赖于惯性参照系的选择。尽管如此，我们仍然可以通过对称性分析得到一些明确的结论。设惯性参照系 F' 相对于 F 以速度 v 运动，该速度沿着 $\hat{x}$ 方向。磁偶极矩和电偶极矩在参照系 F 中静止，它们值分别为 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{p}$ ，它们在参照系 F' 中分别变为 $\boldsymbol{m}'$ 和 $\boldsymbol{p}'$ ，如下图所示。

该系统具有如下的分立对称性：(1)对于 zx 平面的镜面反射对称性 σ_{zx} ；(2)对于 xy 平面的镜面反射对称性 σ_{xy} ；(3)时间反演和绕着 y 轴旋转 180° 的复合对称性 $R_y(\pi)T$ 。我们把磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 和电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 在上述对称性操作(1)，(2)，(3)下的对称性质，列在表1。

表1 惯性参照系 F' 相对于 F 沿着 $\hat{x}$ 方向运动，这个相对运动状态分别在镜面反射 σ_{zx} 、 σ_{xy} 以及时间反演和绕 y 轴旋转 π 的复合操作 $R_y(\pi)T$ 下保持不变。表中列出了磁偶极矩和电偶极矩的各个分量在这些变换下的奇偶性

	m_x	m_y	m_z	p_x	p_y	p_z
σ_{zx}	-	+	-	+	-	+
σ_{xy}	-	-	+	+	+	-
$R_y(\pi)T$	+	-	+	-	+	-



参照系 F' 相对于参照系 F 沿着 $\hat{x}$ 方向运动。磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 和电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 在参照系 F 中静止。当它们变换到参照系 F' 时，如表1所示，可以分成四个对称性类别。它们的纵向分量分成两组 m_x 和 p_x 各成一类，分别变换到其自身。它们的横向分量可以分成两类 (m_y, p_z) 和 (m_z, p_y) 。同类别的分量之间可以变换，不同类别的分量之间则不会混合

根据表1所示的磁、电偶极矩的对称性质，我们有以下的推论。

推论(I)：如果在 F 中 $\boldsymbol{m} = 0$ ， $\boldsymbol{p} = 0$ ，则在 F' 中，仍然有 $\boldsymbol{m}' = 0$ 和 $\boldsymbol{p}' = 0$ 。论证如下。

该系统在表1中所示的三个变换之下都是不变。而 $\boldsymbol{m}'$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 的所有分量，都至少在一个变换下为反号，所以只能有 $\boldsymbol{m}' = 0$ 和 $\boldsymbol{p}' = 0$ 。

推论(II)：如果在 F 中 $\boldsymbol{m} \parallel \hat{x}$ 以及 $\boldsymbol{p} = 0$ ，则在 F' 中仍然有 $\boldsymbol{m}' \parallel \hat{x}$ 和 $\boldsymbol{p}' = 0$ 。论证如下。

因为该系统具有绕着 x 轴的旋转对称性，则有 $\boldsymbol{m}' \parallel \boldsymbol{p}' \parallel \hat{x}$ 。该系统也具有在复合操作 $R_y(\pi)T$ 下的对称性，而 p'_x 在此对称变换下反号，因此 $\boldsymbol{p}' = 0$ 。我们有 $\boldsymbol{m}' \neq 0$ ，否则的话，在 F' 中磁、电偶极矩都为零，则根据推论(I)，它们在 F 中也都是零。这与假设矛盾。

推论(III)：如果在 F 中 $\boldsymbol{p} \parallel \hat{x}$ 以及 $\boldsymbol{m} = 0$ ，则在 F' 中仍然有 $\boldsymbol{p}' \parallel \hat{x}$ 和 $\boldsymbol{m}' = 0$ 。论证过程和推论(II)中类似，留给读者作为练习。

附录B: 运动的电流环的受力分析

在正文中, 我们根据如下事实, 即在一个惯性系中静止的物体在另外一个惯性系中做匀速直线运动, 论证了图(1)中电流环在参照系F中以速度 v 做漂移运动。在此基础上建立了相对论的时空坐标变换之后, 原则上就可以推导相对论性的力的变换, 这里不再赘述。

我们来对电流环做一下受力分析。如下图所示, 设在参照系F中, 磁场 $\mathbf{B} = B_z \hat{z}$, 电场 $\mathbf{E} = E_y \hat{y}$, 满足 $B_z = \frac{v}{c} E_y$; 电流环半径为 r , 其法线沿着 $\hat{x}$ 方向, 速度 v 也是沿着 $\hat{x}$ 方向, 其中的电流为 I 。在角度 θ 处取导线元 $d\mathbf{l} = dl \hat{e}_\theta$ 。我们下面论证在参照系F中, 运动的导线元所受的安培力为 $d\mathbf{F} = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ 。

先变换到跟随电流环运动的随动参照系S中, 来分析导线元的受力。在此系中该导线元静止, 原时 $d\tau$ 和参照系F中的时间间隔 dt 满足 $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ 。因此在参照系S中, 电流环中的电流为 $I_s = \gamma I$ 。在随动参照系S中, 极板静止只产生电场没有磁场。根据公式(16)可以得到其中的磁场 $\mathbf{B}_s = 0$, 电场 $\mathbf{E}_s = E_{s,y} \hat{y}$, 其中 $E_{s,y} = \gamma(E_y - \frac{v}{c} B_z) = \gamma^{-1} E_y$ 。

在随动参照系S中, 因为磁场为零, 则线元受安培力 $d\mathbf{F}_s = 0$ 。但是电场 $\mathbf{E}_s$ 对线元的功率为 $dW = I_s dl \mathbf{E}_s \cdot \hat{e}_\theta = I E_y dl \sin\theta$ 。根据相对论力的变换, 该线元在参照系F中的受力 $d\mathbf{F}$ 仅有 $\hat{x}$ 分量, 即 $dF_x = \frac{1}{1 - \beta_x \beta} (dF_{s,x} - \frac{\beta}{c} dW)$, 其中 $\beta = -\frac{v}{c}$ 是参照系F相对于参照系S的无量纲化速度, $\beta_x = 0$ 是线元在S中无量纲化速度的 $\hat{x}$ 分量。则有:

$$d\mathbf{F} = dF_x \hat{x} = \frac{v}{c^2} I dl E_y \sin\theta \hat{x} = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} . \quad (\text{B1})$$

沿着电流环对线元做积分, 可得:

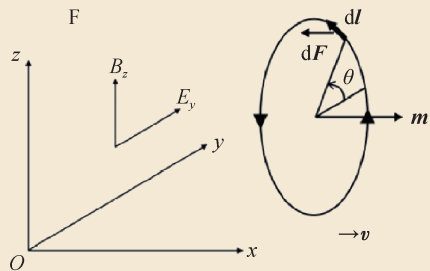
$$\mathbf{F} = \oint d\mathbf{F} = 0 . \quad (\text{B2})$$

电流环所受到的力矩非零, 为

$$\boldsymbol{\tau} = \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -m B_z \hat{y} , \quad (\text{B3})$$

其中 $\mathbf{m} = \frac{I}{c} A \hat{x}$, A 是电流环的面积。在推导(B3)式的过程中, 用到了恒等式 $(\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l}) \times \mathbf{B} = \oint (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l} - \mathbf{B} \oint (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l})$, 以及 $\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。

为什么在参照系F中, 电流环受到非零的力矩 $\boldsymbol{\tau}$, 但是仍然保持匀速直线运动而且没有转动的状态呢? 这和磁矩在电场中存在的“隐藏动量”(hidden momentum)有关。在参照系S中, 电流环的磁矩 $\mathbf{m}_s = \gamma m \hat{x}$, 电场 $\mathbf{E}_s = \gamma^{-1} E_y \hat{y}$ 。该电流环具有“隐藏动量” $\mathbf{P}_s = \frac{1}{c} \mathbf{m}_s \times \mathbf{E}_s = \frac{1}{c} m E_y \hat{z}$, 其起源是相对论效应。详情请参考D. J. Griffith的教材[11], 这里不再详述。



参照系F中存在正交电磁场。电流环处在 yz 平面中, 其速度 v 沿着 $\hat{x}$ 方向。考虑其中一个小线元 $d\mathbf{l}$, 其受到的安培力由公式(B1)给出

当变换到参照系F中, 该电流环的动量 $\mathbf{P} = P_x \hat{x} + P_z \hat{z}$, 其中 P_x 对应于电流环沿着 $\hat{x}$ 方向的运动, $P_z = P_s = \frac{1}{c} m E_y$ 是“隐藏动量”。则该电流环在参照系F中的轨道角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ 的时间变化率为,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{P} = -m \frac{v}{c} E_y \hat{y} = \boldsymbol{\tau} , \quad (\text{B4})$$

其中用到了 $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} = 0$ 。因为“隐藏动量”的缘故, 运动的电流环的轨道角动量随时间变化, 这需要安培力来提供相应的力矩。