

# 火箭推进速度上限的估算

吴从军<sup>†</sup>

(西湖大学物理系 新基石科学实验室 杭州 310024)

2024-06-27收到

<sup>†</sup> email: wucongjun@westlake.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20240909

我国长征5号B火箭的第一级采用液氢液氧做推进剂。相比较于传统燃料(例如四氧化二氮搭配偏二甲肼),液氢液氧燃料的推力大幅度增加,大大提高了火箭的有效载荷。长征五号B的成功,标志着我国加入了世界火箭发展的第一梯队,令人振奋。

目前,化学燃料仍然是各国火箭的主要推进剂,但是其推进原理有很大的局限性,而且这个局限性是本质的。化学键的能标(energy scale),即形成或打破化学键时能量的变化范围,只有几个电子伏(eV)的数量级。这样小的能标决定了单靠化学燃料难以把火箭推进到第三宇宙速度(16.7 km/s)。化学燃料推进可以实现太阳系内的行星际航行,但是要像科幻小说《三体》中描述的那样,翱翔于星辰大海,进行恒星际航行,就需要摆脱太阳引力,对于这个目标化学燃料显然是力不从心了。

要提高推进速度的上限,则需要提高推进原理的物理能标。本文不分析技术性的困难,只讨论原理上的可能性。文献中经常提到的离子推进(ion propulsion),属于电磁推

进(electromagnetic propulsion)的一种,很容易把能标提高到千电子伏(keV)量级<sup>1)</sup>。在科幻小说里流行的核动力推进,其能标在兆电子伏(MeV)量级。更加奇幻的正反物质湮灭推进,则可以把火箭推进到逼近光速的程度。下面我们通过简单地推导,来估算这些推进速度的上限。

先回顾一下大学物理课上学过的Tsiolkovsky(齐奥尔科夫斯基)方程。最简单的火箭,莫过于二踢脚了。尽管简单,原理并没有什么不同,也是以喷射火药燃烧的气体来驱动。设其喷射速度相对于火箭为 $v_p$ 。如图所示,在时刻 $t$ ,火箭的飞行速度为 $v(t)$ ;在此之后 $dt$ 的时间内,向后喷出了质量为 $-dm$ 的气体(火箭质量在减小,所以 $-dm > 0$ )。根据动量守恒,有 $mdv + dm v_p = 0$ 。对此式进行积分,可得喷射完成时的火箭速度,

$$v = v_p \ln \frac{1}{r}, \quad (1)$$

其中, $r = m_f/m_0$ 被称作火箭的干湿质量之比。火箭喷射结束时的质量 $m_f$ 被称为干质量,火箭初始质量称为湿质量 $m_0$ 。如果火箭有多级结构,则可以得到,

$$v = v_p \sum_i \ln \frac{1}{r_i}, \quad (2)$$

其中, $r_i$ 是第 $i$ 级推进阶段结束和开始时的干湿质量之比。

$v_p$ 也叫做比冲(specific impulse),即燃烧单位质量的燃料使得火箭得到的冲量,

$$I_{sp} = \frac{dI}{dm} = v_p. \quad (3)$$

文献中,比冲也有另外一种定义,即把式(3)中的单位质量换成单位重量,这样定义的比冲为 $v_p/g$ ,其单位是时间( $g$ 是重力加速度)。

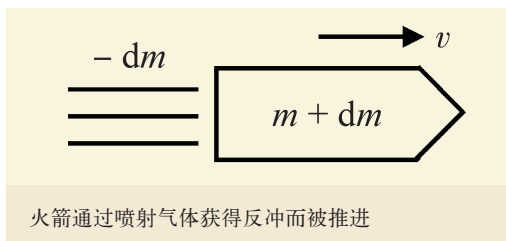
下面对各种推进原理的比冲 $v_p$ 进行数量级估计,包括化学燃料推进、电磁推进、核动力推进、正反物质湮灭推进等。

## 1 化学燃料推进

化学燃料的燃烧,其实是化学键的断裂和再形成的过程,这中间能量的释放形成火箭推进的动力。化学键是原子间的电子成键,其键能在几个eV量级,因此可以推断其燃烧热为 $c \times 6 \times 10^{23}$  eV/mol  $\approx c \times 100$  kJ/mol,其中 $c$ 是数量级估计中不能确定的常数,大致介于1到10之间。可以查到 $H_2$ 的低热燃烧热,即生成物为水蒸气形态时的燃烧热为120 kJ/g,即240 kJ/mol。这个数据和上面的估算在数量级上是相符的。1 mol  $H_2$ 燃烧生成1 mol水,其质量为18 g。据此可以折算出每生成质量为1千克的水蒸气,其放热约 $Q = 13$  MJ。设这些能量完全转化为水蒸气喷射的机械动能,则给出化学燃料推进的比冲上界,

$$\begin{aligned} v_p &< v_{\text{chm}} = \sqrt{2MQ} \\ &= \sqrt{2 \times 13 \times 10^6} \text{ m/s} \approx 5 \text{ km/s}. \end{aligned} \quad (4)$$

水是分子量最小的燃烧生成物,氢氧燃料火箭只生成水,其比冲是最佳的。因此, $v_{\text{chm}}$ (值为5 km/s)可以



1) [https://en.wikipedia.org/wiki/Ion\\_thruster](https://en.wikipedia.org/wiki/Ion_thruster)

作为化学燃料比冲的上限。

再考虑(2)式右方的对数因子。以长征5号B火箭为例,其总重837吨,载荷25吨。火箭除了载荷以外,不会全是燃料,还有箭壳等。估计一下,等式右方的对数之和不会超过 $\ln \frac{837}{25} \approx 3.5$ 。所以,对于一个完全采用化学推进的火箭来说,它所能达到的速度上限可以被估计为,

$$v_{\max} < 3.5 v_{\text{chm}} = 17.5 \text{ km/s} .$$

这样,我们可以得出结论:只采用化学燃料推进方案的火箭,可以达到第二宇宙速度(11.2 km/s),但对于第三宇宙速度则是很勉强的。

## 2 电磁推进

这是一种用电磁场来加速工作介质并喷射,从而获得反冲的驱动方式。比如“离子推力器”(ion thruster)方案,先将惰性气体电离,用电场把离子加速后喷出。离子动能可以很容易地达到1 keV的量级。Deep space、Dawn等航天器上采用的氙气推进,其比冲可以达到1700—3300 s(以时间为单位),也就是17—33 km/s(以速度为单位)。

可以通过简单地估算来验证这些数据的合理性:氙的原子量为131,其原子的质量用eV做单位是131 GeV。如果用1 kV的电压来加速氙离子(设只带一个正电荷),获得动能1 keV。其比冲可以估算为

$$v_p = c \sqrt{\frac{2E}{Mc^2}} \approx c \sqrt{\frac{2 \times 10^3}{131 \times 10^9}} \\ = 1.2 \times 10^{-4} c \approx 36 \text{ km/s} , \quad (6)$$

其中 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 是光速。

离子推进的比冲大,并不代表其推力(specific thrust)大。推力反映的是火箭的加速性能,而比冲决定了最终能达到的速度。离子推进远比化学推进所产生的推力要小,一

般小于1牛顿。这是因为在单位时间内,能够喷射的离子数目非常少。离子推进只能在无重力高真空的环境中使用,使得火箭经过长时间微小的加速来达到高速度。

## 3 核反应推进

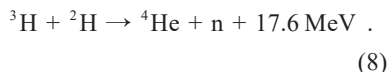
核反应的能标在MeV水平,非常高。先考虑裂变,一个铀235核裂变放出200 MeV能量。质量 $M$ 为1千克的铀235,即4.25 mol,里面有 $2.5 \times 10^{24}$ 个核,释放出 $5 \times 10^{26} \text{ MeV}$ 的能量,也就是 $E = 8 \times 10^{13} \text{ J}$ 。1克TNT的能量是1 kcal。简单换算可知,1千克铀235爆炸的当量相当于2万吨TNT。

假设把核反应生成物喷射出去来实现推动。裂变反应的质量亏损只有千分之一左右,可以忽略不计。如果能量利用率 $\eta = 0.2$ ,也就是说只有20%可以转换为喷射物的动能,那比冲大致为

$$v_p = \sqrt{\eta 2mE} \sim \sqrt{0.2 \times 2 \times 8 \times 10^{13}} \\ = 5600 \text{ km/s} , \quad (7)$$

这已经超过了光速的百分之一。

核聚变的能量要更高一点,其相应的比冲会更加可观。考虑聚变核反应:



质量 $M$ 为1千克核燃料,其中氘核、氚核等数目混合。这将生成200 mol氦核,放出 $E = 200 \times 6 \times 10^{23} \times 17.6 = 2 \times 10^{27} \text{ MeV}$ 的能量,合 $3.2 \times 10^{14} \text{ J}$ 。这是裂变能量的4倍左右。同样假设20%的能量转换为喷射物的动能,比冲可以达到:

$$v_p = \sqrt{\eta 2mE} \sim \sqrt{0.2 \times 2 \times 3.2 \times 10^{14}} \\ \approx 11300 \text{ km/s} . \quad (9)$$

这已经达到了光速的1/30。

在《三体》一书里面,人类的星际战舰的推进速度,可以达到光

速的1/10。考虑到在上面的估算中对能量转化率估计得比较保守,再考虑到火箭干湿质量的对数因子,核聚变推进确实可以使得火箭达到1/10的光速。这时候相对论效应开始出现,但还不明显,式(1)还可以适用。

## 4 正反物质湮灭推进

正反物质湮灭发射 $\gamma$ 射线,采用这种方式来推进火箭,有望逼近光速。这时需要考虑相对论效应,公式(1)就不再适用了。下面来推导相应的火箭运动方程。假设 $\gamma$ 射线可以由反射装置全部向后方喷射。当然设计能够反射 $\gamma$ 射线的镜子并不容易,那是未来科学家们的事,我们现在就假设其可行好了。

在地面参照系中,设在时刻 $t$ 火箭的速度为 $v(t)$ ,并沿着 $x$ 方向;火箭的静止质量为 $m(t)$ 。则火箭的能动量四矢量为

$$p^\mu(t) = (\gamma(t)m(t)v(t), 0, 0, \\ \gamma(t)m(t)c) , \quad (10)$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ,  $\beta = v/c$ 。在此之后 $\Delta t$ 的时间内,喷出的 $\gamma$ 射线能动量四矢量为 $p_\gamma^\mu = (-p_\gamma, 0, 0, p_\gamma)$ 。

能动量守恒给出 $p^\mu(t + \Delta t) + p_\gamma^\mu = p^\mu(t)$ 。因为 $\gamma$ 光子的能动量四矢量的 $x$ 分量和时间分量之和为0,所以火箭能动量四矢量的相应分量之和则是一个和时间无关的常量: $f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} m$ 。从 $\frac{d \ln f(t)}{dt} = 0$ ,经过简单的代数运算可得,

$$-\frac{dm}{m} = \frac{d\beta}{1-\beta^2} . \quad (11)$$

设火箭从静止开始推进,对上式进行积分可得,

$$v(t) = c \frac{1-r^2}{1+r^2} , \quad (12)$$

其中 $r$ 是火箭干湿质量比。

## 5 总结

各种火箭推进原理的物理能标不同，这决定了它们能达到的速度的上限。化学燃料推进的能标是 eV，比冲的上限 5 km/s；电磁推进的能标是 keV，其比冲可以达到 30—40 km/s 的量级。核动力推进的能标是 MeV，其比冲保守估计可以达到 10000 km/s 的量级。这些方案中的喷射物运动都是非相对论的。

在相同能量转化率的条件下，比冲和能标的平方根成正比。对于正反物质湮灭的推进方案，其喷射物是  $\gamma$  光子，比冲就是光速本身。

再考虑上火箭干湿质量比的对数因子，化学燃料火箭的推进速度可以达到第二宇宙速度，但是要到达第三宇宙速度会很困难。因此，化学燃料推进是行星际航行的驱动方式。将化学燃料驱动和电磁驱动结合，可以超越第三宇宙速度，是

恒星际航行入门阶段的驱动方式。核动力驱动可以达到 1/10 光速的驱动速度，是恒星际航行正常的驱动方式。当然，正反物质湮灭推进可以逼近光速，是驱动原理的天花板，是星系际航行的推进方式。

**致谢** 感谢西湖大学程子正、刘鸿祎同学检查本文中的计算。本工作得到了新基石科学基金会的资助。

### 悟理小言

## 李政道与玻尔的一则小故事

1995 年夏天，全球华人物理和天文学会在汕头召开第一次大会。会上世界各地学者云集，包括四位华人诺贝尔奖获得者，杨振宁、李政道、丁肇中、李远哲，和中国科学院院长周光召，盛况空前。会议开始前，李政道先生讲述了一段鲜为人知的关于量子力学历史的故事，让我茅塞顿开。

当李先生还在普林斯顿高等研究所时的某一日，玻尔到访。李政道和玻尔共进午餐时，李问玻尔，为什么要那么久才发现解释氢原子光谱的玻尔模型？

量子概念是普朗克于 1900 年为了解释黑体辐射光谱而提出的。1905 年，爱因斯坦利用它创出光子来解释光电效应。但直到 1913 年，玻尔的原子模型才问世，成功地解释了氢原子的光谱。此时距离量子的提出，已经过了 13 年，为什么需要的时间如此长久？这就是李先生的问题。

玻尔的答案，有点出乎意料，是大部分人都不知道的。我问过几位物理前辈，如 Norman Ramsey, Louis Michel, J. David Jackson 等，他们都没有听说过这个件事，所以我认为这是一个鲜为人知、十分值得保留的历史档案。

玻尔说，你不懂，当时没有人会想到氢光谱是从一个原子发出的。

要听到一个沉重的鼓声，一定要一面大鼓，因为鼓面振动的波长不能大于它的直径。其他的经典波也相似，波长不能比波源大。在 1913 年以前，人们已经知道氢的光谱包含可见光，波长是几百纳米。

氢原子的大小也晓得，是二十分之一纳米。波长比原子大了几千、一万倍，氢光谱当然不能从单一的原子发出，只能是由成千上万个氢原子产生的一种集体效应。这就是为什么玻尔说，当时没有人会想到氢光谱是从一个原子发出的。

玻尔的智慧是，他认识到量子效应可以给出另外一种机制。氢光谱不由普通振荡产生，所以光源不一定要比波长长。有了量子效应，就算氢原子那么小的东西，也可能是氢光谱的光源。无论新机制是什么，如果光源的确只是一个原子，那么就必须先解答一个难题：唯一可以用上的参考长度是氢原子的大小，它比波长小了几千到一万倍，这个放大机制是什么？

爱因斯坦用普朗克量子常数  $\hbar$  把频率变成能量，从而解释了光电效应。玻尔利用  $\hbar$ ，光速  $c$ ，和电子质量  $m$  造出一个基本长度， $r = \hbar/mc$ 。但这个基本长度  $r$  很小，只有  $3.86 \times 10^{-4}$  nm，比原子还小得多，但氢谱的波长的确是由这个基本长度经过两次放大而产生。玻尔当时也认识到，从电子的电荷  $e$  和  $\hbar$ ， $c$ ，可以造出一个缩小因子  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ 。把  $r$  放大  $1/\alpha$  倍后，得到氢原子的大小 0.053 nm，解释了原子大小的来源。再放大  $1/\alpha$  倍，变成 7.25 nm，这就是光谱波长的基本来源。虽然它比氢光谱的波长还小几十倍，但玻尔模型内出现的其他因子，如  $4\pi$  之类，最后会给出氢谱的准确波长。这就是玻尔想出来的新机制，与整体振荡无关。没有量子，没有  $\hbar$ ，这个机制是绝对行不通的。

(加拿大麦吉尔大学 蓝志成 供稿)