

铀 235 临界质量的估算

吴从军[†]

(西湖大学物理系 新基石科学实验室 杭州 310024)

2024-05-16 收到

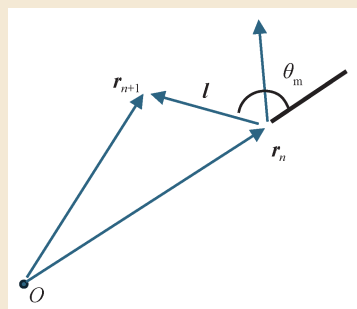
[†] email: wucongjun@westlake.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20240609

海森伯是德国著名物理学家，以开创了量子力学的第一种现代意义上的表述形式——矩阵力学，以及发现了测不准原理闻名于世。然而，他的人生也有一些有争议的地方。例如，他曾经主持过纳粹德国的核计划。下面是一个关于他的传说。

在1945年德国战败后，海森伯和哈恩等人被美军俘虏，一起被软禁在英国的一个庄园里。哈恩是1938年发现原子核裂变的核物理学家。1945年8月，在广岛“小男孩”原子弹爆炸后，美英方故意把消息告诉他们，然后监听他们的反应。海森伯和哈恩一边散步一边聊。海森伯说这个消息是假的，除非美国能把成吨的铀扔下去。他估算的铀 235 的临界质量在 10 吨量级。其实“小男孩”原子弹只装了大约 60 公斤铀 235。海森伯的估计和真实情况相去甚远，有数量级的差别。

在分析海森伯为什么会把临界质量估算错误之前，先介绍一点背



景材料：一个铀 235 原子核在被一个热中子（也就是动能 25 meV 左右的中子，折算成温度 $T = E_k/k_B \approx 300$ K）轰击时裂变成两个中等大小的原子核。这个过程中大约放出 200 MeV，即 3.2×10^{-11} J 的能量，同时平均生成 2.5 个中子。中子的平均自由程 $l \approx 6$ cm。爆炸当量通常按 TNT 炸药来计算。1 克 TNT 炸药释放的能量是 1 千卡，即 4.2 kJ。广岛原子弹当量是 15000 吨 TNT，释放的能量为 6.3×10^7 MJ。这相当于 2×10^{24} 个铀原子发生裂变，即 3.3 mol 的铀 235。也就是说，“小男孩”原子弹中实际发生裂变的铀 235，才 780 g 左右，还不到 1 kg。

海森伯用中子的无规行走来计算裂变链式反应的持续问题。在反应了 N 步之后，根据无规行走的特点，知道中子的扩散距离 $d \approx \sqrt{N}l$ ， l 为中子的平均自由程，“小男孩”原子弹中大致发生了 60 步链式反应 ($2 \times 10^{24} \approx 2.5^{61}$ ，底数 2.5 为每次反应放出的平均中子数)。这样，铀球的半径要 $d \approx \sqrt{60} \times 6 = 46$ cm，相应的体积略大于 400 dm³。铀的比重约为 19，可以估算出其临界质量在 8 吨左右。因为这样的重量，海森伯觉得原子弹是不可能作为实战武器来使用的。

一个星期以后，海森伯意识到了自己的错误。他的错误在于忘了裂变反应是中子增殖的。在他的估算中，铀块要大到可以容纳反应中释放的所有中子，但这是不必要的。在每一步反应中，只要有平均

多于一个中子留在铀块内，比如 1.1 个，链式反应仍然可以继续。

我们进行如下的估计，设反应开始于 O 点，记第 n 步反应时的位置为 r_n 。设中子运动方向是随机的，则其速度与 r_n 夹角的余弦 $\cos \theta$ 在 $[-1, 1]$ 之间均匀分布，如图所示。

为计算简单，保守考虑按每步发射 2 个中子来计算。这两个中子和 r_n 夹角较大的那个记作 $\cos \theta_m$ ，经过简单的概率分析可得，其平均值 $\overline{\cos \theta_m} = -1/3$ 。（这个结论留给读者做练习）。这样我们得到递推关系：

$$\begin{aligned} \overline{r_{n+1}^2} &= \overline{r_n^2} + l^2 + 2 \overline{\cos \theta_m} l \overline{r_n}, \\ \overline{r_{n+1}^2} - \overline{r_n^2} &\approx l^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\overline{r_n}}{l} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

这样，只要铀块半径达到了 $r_n = \frac{3}{2}l$ ，即有 $\overline{r_{n+1}^2} < \overline{r_n^2}$ ，平均就有超过一个中子往回走，链式反应即可继续。所以铀块的临界半径可以取 $\frac{3}{2}l \approx 10$ cm 作为上界，也就是 4.2 dm³ 的体积，其对应的临界质量为 80 kg。考虑到每步平均发射的中子数为 2.5，这个估算可以作为临界质量的一个比较保守的上界，即 $M_c < 80$ kg。

真实的临界质量值为 52 kg。这个估算比真实值要高一些，相差不到一倍，作为数量级估计，其效果已经很好了。

核物理书上对于临界质量的计算往往很复杂，需要解反应扩散方程。上面的估算，物理图像清晰，计算简单明了，并给出了正确的数量级。可见数量级估计是可以解决大问题的。