铀235临界质量的估算

吴从军[†]

（西湖大学物理系　新基石科学实验室　杭州　310024）

2024－05－16收到

† email：wucongjun@westlake.edu.cn

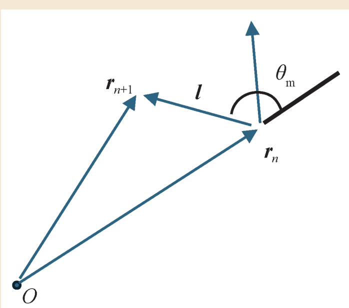
DOI：10.7693/wl20240609

海森伯是德国著名物理学家，以开创了量子力学的第一种现代意义上的表述形式——矩阵力学，以及发现了测不准原理闻名于世。然而，他的人生也有一些有争议的地方。例如，他曾经主持过纳粹德国的核计划。下面是一个关于他的传说。

在1945年德国战败后，海森伯和哈恩等人被美军俘虏，一起被软禁在英国的一个庄园里。哈恩是1938年发现原子核裂变的核物理学家。1945年8月，在广岛“小男孩”原子弹爆炸后，美英方故意把消息告诉他们，然后监听他们的反应。海森伯和哈恩一边散步一边聊。海森伯说这个消息是假的，除非美国能把成吨的铀扔下去。他估算的铀235的临界质量在10吨量级。其实“小男孩”原子弹只装了大约60公斤铀235。海森伯的估计和真实情况相去甚远，有数量级的差别。

在分析海森伯为什么会把临界质量估算错误之前，先介绍一点背景材料：一个铀235原子核在被一个热中子(也就是动能25 meV左右的中子，折算成温度 $T = E_K/k_B \approx 300$ K)轰击时裂变成两个中等大小的原子核。这个过程中大约放出200 MeV，即 3.2×10^{-11} J的能量，同时平均生成2.5个中子。中子的平均自由程 $l \approx 6$ cm。爆炸当量通常按TNT炸药来计算。1克TNT炸药释放的能量是1千卡，即4.2 kJ。广岛原子弹当量是15000吨TNT，释放的能量为 6.3×10^{7} MJ。这相当于 2×10^{24} 个铀原子发生裂变，即3.3 mol的铀235。也就是说，“小男孩”原子弹中实际发生裂变的铀235，才780 g左右，还不到1 kg。

海森伯用中子的无规行走来估计裂变链式反应的持续问题。在反应了 N 步之后，根据无规行走的特点，知道中子的扩散距离 $d \approx \sqrt{N}\,l$，l 为中子的平均自由程，“小男孩”原子弹中大致发生了60步链式反应($2\times10^{24}\approx2.5^{61}$，底数2.5为每次反应放出的平均中子数)。这样，铀球的半径要 $d\approx\sqrt{60}\times6 = 46$ cm，相应的体积略大于400 dm^3。铀的比重约为19，可以估算出其临界质量在8吨左右。因为这样的重量，海森伯觉得原子弹是不可能作为实战武器来使用的。



第 n 步裂变反应发生在位置 $\boldsymbol{r}_n$。发射出的中子里与 $\boldsymbol{r}_n$ 最大的那个夹角的余弦记作 $\cos\theta_m$。如果(1)式可以满足，则平均每步有多于一个中子留在铀块内，从而使得链式反应得以持续进行

一个星期以后，海森伯意识到了自己的错误。他的错误在于忘了裂变反应是中子增殖的。在他的估算中，铀块要大到可以容纳反应中释放的所有中子，但这是不必要的。在每一步反应中，只要有平均多于一个中子留在铀块内，比如1.1个，链式反应仍然可以继续。

我们进行如下的估计，设反应开始于 O 点，记第 n 步反应时的位置为 $\boldsymbol{r}_n$。设中子运动方向是随机的，则其速度与 $\boldsymbol{r}_n$ 夹角的余弦 $\cos\theta$ 在[−1, 1]之间均匀分布，如图所示。为计算简单，保守考虑按每步发射2个中子来计算。这两个中子和 $\boldsymbol{r}_n$ 夹角较大的那个记作 $\cos\theta_m$，经过简单的概率分析可得，其平均值 $\overline{\cos\theta_m} = -1/3$。(这个结论留给读者做练习)。这样我们得到递推关系：

$$\overline{r_{n+1}^2} = \overline{r_n^2} + l^2 + 2\,\overline{\cos\theta_m}\,l\,\overline{r_n}\ ,$$

$$\overline{r_{n+1}^2} - \overline{r_n^2} \approx l^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{\overline{r_n}}{l}\right). \tag{1}$$

这样，只要铀块半径达到了 $r_n = \frac{3}{2}l$，即有 $\overline{r_{n+1}^2} < \overline{r_n^2}$，平均就有超过一个中子往回走，链式反应即可继续。所以铀块的临界半径可以取 $\frac{3}{2}l \approx 10$ cm作为上界，也就是4.2 dm^{3}的体积，其对应的临界质量为80 kg。考虑到每步平均发射的中子数为2.5，这个估算可以作为临界质量的一个比较保守的上界，即 $M_c < 80$ kg。

真实的临界质量值为52 kg。这个估算比真实值要高一些，相差不到一倍，作为数量级估计，其效果已经很好了。

核物理书上对于临界质量的计算往往很复杂，需要解反应扩散方程。上面的估算，物理图像清晰，计算简单明了，并给出了正确的数量级。可见数量级估计是可以解决大问题的。

Lecture 10 Estimation of the critical mass of U_{235}

☆ Heisenberg's story : He estimated the critical mass at the order of tons.

Nuclear fission

$$^{235}_{92}U + n \longrightarrow {}^{144}_{56}Ba + {}^{90}_{36}Kr + 2n + 200\text{ Mev}$$

middle sized nuclei + 2n or 3n

Electrostatic energy of a nucleus:

$$U = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{A^{1/3} r_0} = A^{5/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 \frac{e^2}{a_0}\frac{3}{5}\frac{a_0}{r_0}$$

$$\frac{e^2}{a_0} = 27.2\text{ ev} \quad E_{Ry}, \quad \frac{3}{5}\frac{a_0}{r_0} \approx \underset{\times 0.6}{0.5\times 10^5} = 3\times 10^4$$

$$U \approx A^{5/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 \times 0.8\text{ eV} \longrightarrow$$ more accurately charge distribution may not be uniform : $0.8 \to 0.7$

Rough estimation: electrostatic energy releasing,

$$\Delta E = (235^{-1/3}\cdot 92^2 - 144^{-1/3}\cdot 56^2 - 90^{-1/3}\cdot 36^2)\times 0.8\text{ Mev}$$

$$\approx 400\text{ Mev}$$

This electrostatic ΔE is higher than the actual energy realeasing during the fission. The surface energy of the nuclei is also changed, due to the increase of surface area. The electrostatic energy change is already at the same order.

1 Yield of "little boy": 15000 ton TNT

1 g TNT $\sim$ 1 kcal = 4.2 kJ

one fission 200 MeV $\simeq 3.2 \times 10^{-11}$ J

$\Rightarrow$ 15000 ton TNT $\rightarrow 1.5\times10^{4}\times10^{6}\times4.2\times10^{3}$ J $= 6.3\times10^{7}$ MJ

$\sim 2\times10^{24}$ U atom fission.

3.3 mol ^{235}U — 780 g < 1 kg.

$2\times10^{24} \approx 2.5^{61}$ — or 2^{80}

$\leftarrow$ averge neutron number 2.5

61 step chain-reaction: (or 80 steps of reaction)

$d = \sqrt{N}\cdot l$ with $N = 61$, $l = 6$ cm

$\Rightarrow$ radius $d \simeq 46$ cm $\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \simeq 400\ \mathrm{dm}^3$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{U: mass 7.6 ton.}}$ $\leftarrow$ this is obviously wrong!

l: mean-free path : how to estimate?

neutron radius r_0

$\pi r_0^2 \cdot l =$ averge voulume per U-nuclus.

$$v = \frac{1\ \mathrm{cm}^3}{\frac{19}{235}\times6\times10^{23}} = \frac{10^{-6}}{\frac{19\times6}{235}\times10^{23}}\ \mathrm{m}^3 = 2\times10^{-29}\ \mathrm{m}^3$$

$$\Rightarrow \boxed{l \sim \frac{2\times10^{-29}}{3.14\times(10^{-15})^2}\ \mathrm{m} \simeq 6.3\ \mathrm{cm}.}$$

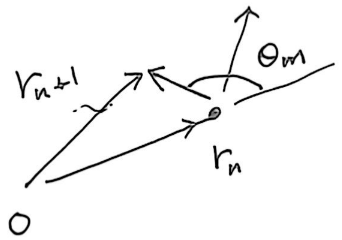
☆ My estimation.

In fact, the bulk of U does not need to hold all neutrons

As long as one neutron remaining in the bulk, the chain reaction

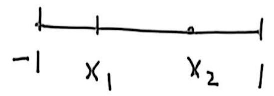
will ~~continue~~ continue.

r_n : the position at the n-th step



2 neutrons emission

$$\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \rightarrow \int_{-1}^{1} dx \qquad X = \cos\theta \qquad \Rightarrow$$



$$\overline{\cos\theta_1} = \overline{x_1} = \int_{-1}^{1} x_1 \, dx_1 \int_{x_1}^{1} dx_2 \Big/ \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{x_1}^{1} dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1} x_1(1-x_1)\, dx_1 \Big/ \int_{-1}^{1} (1-x_1)\, dx_1$$

$$= -\int_{-1}^{1} x_1^2 \, dx_1 \Big/ \int_{-1}^{1} dx_1 = -\frac{1}{3} x_1^3 \Big|_{-1}^{1} \Big/ x_1 \Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}$$

$$r_{n+1}^2 = r_n^2 + l^2 + 2\cos\theta_m \, l \, |r_n| \longrightarrow$$

$$\overline{r_{n+1}^2} - \overline{r_n^2} = l^2\left(1 - \frac{2}{3}\frac{|\overline{r_n}|}{l}\right)$$

hence as long as $r_n > \frac{3}{2} l$, then $|r_{n+1}| < |r_n|$.

there will be one neutron return. Hence the

critical radius can be set as $\frac{3}{2} \times l \simeq 10$ cm.

Then $V \simeq \frac{4}{3}\pi \cdot r_c^3 \simeq 4.2\, dm^3 \Rightarrow M_{\text{critial}} \simeq 80$ kg

The actual critical mass $\simeq 52$ kg.

Hence, our estimation is already pretty good!

(*) More rigorous calculation

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\nu - 1}{\tau} n ,$$

where ν is the number of neutrons emit in each fission, say, $\nu = 2$.

τ is the mean free time

neutron releasing from fission at 1 Mev.

$$\frac{1}{2} m v^2 / m c^2 = 1\,\mathrm{M.ev} / 1\,\mathrm{Gev} \sim 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} \sim (2 \times 10^{-3})^{1/2} = 4 \times 10^{-2} \Rightarrow v = 3 \times 10^{10}\,\mathrm{cm/s} \times 4 \times 10^{-2}$$

$$\approx 1.2 \times 10^{9}\,\mathrm{cm/s}$$

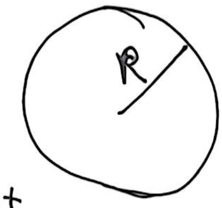
the mean free path $l \simeq 6$ cm $\Rightarrow \tau \simeq \frac{6}{1.2 \times 10^9}\,\mathrm{s} \simeq 0.5 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$

For explosition, one needs 60–80 step reaction, hence, the total time would be $< 1 \times 10^{-7}$ s. Only the last a few steps generate enough energy, such that the material only needs to be stable against ioniation for about 10^{-8} s.

$$j = -D\nabla n \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} n = D\nabla^2 n + \frac{\nu - 1}{\tau} n$$

plug in $n = n(r)\, e^{\nu' t/\tau}$, where ν' – effective neutron number

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 n + \frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau} n = 0$$



At $r = R$, we set $n = 0$

(But actually, $n > 0$ at $r = R$, but we will not ~~cosi~~ consider such a possibility).

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \cdots \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rn) + \frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau}(rn) = 0$$

$\Rightarrow \; n = \frac{1}{r} \sin kr$, boundary condition $kR = \pi$.

$$kR = \pi \qquad \text{with} \qquad k^2 = \frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau} = \frac{\pi^2}{R^2} \qquad \text{or} \qquad \boxed{\nu' = \nu - 1 - \frac{\pi^2}{R^2} D\tau}$$

If R is too small, then $\nu' < 0$, the chain reaction stops.

The critic radius $\nu' = 0 \Rightarrow \nu - 1 = \frac{\pi^2}{R^2} D\tau \qquad 2D\tau \sim l^2$

$$\Rightarrow R_c = \pi \sqrt{\frac{D\tau}{\nu - 1}} \simeq \frac{\pi \cdot l}{\sqrt{2}\sqrt{\nu - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{1.5}\sqrt{2}} \cdot l$$

$$= \frac{\pi}{1.7} \cdot l \simeq 1.8 l$$

This is very close to previous solution $R_c \sim 1.5 l$.