

Lect 11 The upper limit of rocket propulsion

- Limit of chemical fuel propulsion

almost to the 3rd cosmic speed 16.7 km/s

- Electromagnetic propulsion $\sim 30 \sim 40 \text{ km/s}$

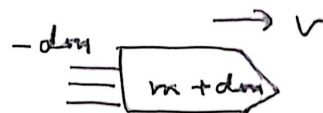
- Nuclear reaction propulsion $\sim \frac{1}{30} c$

- anti-matter annihilation propulsion $\sim c$

• Tsiolkovsky equation

$$m v = (m + dm)(v + dv)$$

$$+ (-dm)(v - v_p)$$



$$0 = \cancel{dm} v - \cancel{dm} v + v_p dm + m dv$$

$$- \frac{dm}{m} = \frac{1}{v_p} dv \Rightarrow -\ln m \Big|_{m_0}^{m_f} = \frac{1}{v_p} \Delta v$$

$$\Delta v = v_p \ln \frac{m_0}{m_f}$$

$$r = m_f / m_0 \quad \text{ratio of dry/wet masses}$$

$$= v_p \ln 1/r$$

If for multiple-stage rocket, we have $v = v_p \sum_i \ln \frac{1}{r_i}$

r_i is the dry/mass ratio of the i -step.

v_p : ~~the~~ specific impulse, i.e. $v_p = I_{sp} = \frac{dI}{dm}$

the impulse gained per unit mass of fuel.

Another definition $I_{sp} = \frac{dI}{d(mg)}$ the I_{sp} 's unit is ti

(3)

§2. Chemical fuel propulsion

Chemical bond energy scale $\sim \text{eV}$

1 mol chemical bond breaking/formation $\sim 6 \times 10^{23} \text{ eV}$

$$\sim 6 \times 10^{23} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J/mol} \approx 0.1 \times 10^5 \text{ J/mol} \approx 100 \text{ kJ/mol.}$$

H_2 - burning. (heat of combustion)

$$= 120 \text{ kJ/g} \rightarrow 240 \text{ kJ/mol} \xrightarrow{18\text{g}} \text{H}_2\text{O}$$

$$1 \text{ kg H}_2\text{O} \quad Q = 13 \text{ MJ}$$

Even if all the energy is transferred to mechanical energy

$$v_p < v_{\text{chem}} = \sqrt{2MQ} = \sqrt{2 \times 13 \times 10^6} \text{ m/s} \approx 5 \text{ km/s.}$$

Long-march 5B: Wet mass 837 t, dry 25 t

$$\ln \frac{1}{r} = \ln \frac{837}{25} \approx 3.5$$

$$\text{Hence } v_{\text{max}} < 3.5 v_p = 17.5 \text{ km/s.} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{2nd cosmic speed}}$$

Hence, chemical fuel propulsion can reach 11.2 km/s,

but it's rather difficult to reach 3rd cosmic speed.

§3. E&M propulsion

ion thruster: Xe^+ , use electric voltage $\overbrace{1\text{Kev}}^{\text{accelerate to}}$.

Xe atomic mass 131 Gev

$$v_p = \sqrt{\frac{2E}{m}} = c \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} = c \sqrt{\frac{2 \times 10^3}{131 \times 10^9}} = 1.2 \times 10^{-4} c \approx 36 \text{ km/s.}$$

缺點: specific thrust is not large. We do not have much Xe^+ ions. $F < 1$ Newton, ion thruster should be used in the out space without of gravity.

§4: Nuclear reaction propulsion

1 U^{235} nucleus 200 Mev

$$1 \text{ kg } ^{235}\text{U} \sim 4.25 \text{ mol} \approx 2.5 \times 10^{24} \text{ nuclei} \sim \frac{5 \times 10^{26} \text{ Mev}}{\times 200 \text{ Mev}}$$

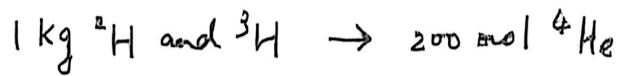
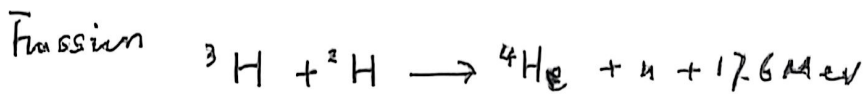
$$\left. \begin{array}{l} \sim 8 \times 10^{10} \text{ kJ} \\ 1 \text{ g TNT} \sim 4.2 \text{ kJ} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \times 10^{10} \text{ g} \approx 2 \times 10^4 \text{ ton TNT.}$$

$$v_p = \sqrt{\eta 2mE} = \sqrt{0.2 \times 2 \times 1 \text{ kg} \times 8 \times 10^{13} \text{ J}} \approx 5600 \text{ km/s.}$$

→
efficiency
20%

already at 1% of light velocity

5



$$E = 200 \times 6 \times 10^{23} \times 17.6 \times 10^6 \text{ eV} \approx 2 \times 10^{27} \text{ MeV}$$

$$= 3.2 \times 10^{14} \text{ J}$$

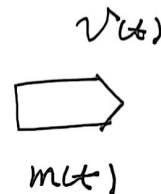
$$v = \sqrt{2 \eta m E} = \sqrt{0.2 \times 2 \times 1 \times 3.2 \times 10^{14}} \approx 1.1 \times 10^4 \text{ km/s}$$

This is $1/30$ of c .

⑤ matter - antimatter annihilation

$$p^\mu(t) = (\gamma(t) m(t), 0, 0, \gamma(t) m(t), c)$$

$v(t)$



in time interval dt .

$$p^\mu_\gamma = (-p_x, 0, 0, p_x)$$

$\longrightarrow x$

$$\Rightarrow p^\mu(t+dt) + p^\mu_\gamma = p^\mu(t)$$

Hence $p^0(t) + p^0_\gamma$ is a const of time: i.e. $\gamma m c + \gamma m c = 2 \gamma m c = 2 m c \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} (1+\beta)$

$$f(t) = \frac{m(t)}{m_0} \sqrt{\frac{1+\beta(t)}{1-\beta(t)}} \text{ is a const}$$

$$\frac{d \ln f}{dt} = 0 \Rightarrow -\frac{dm}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1-\beta} \right) d\beta$$

$$\Rightarrow -\ln m \Big|_{m_0}^{m_f} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$\Rightarrow v(t)/c = \beta(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2} \text{ where } r = m_f/m_0.$$

火箭推进速度上限的估算

吴从军[†]

(西湖大学物理系 新基石科学实验室 杭州 310024)

2024-06-27收到

[†] email: wucongjun@westlake.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20240909

我国长征5号B火箭的第一级采用液氢液氧做推进剂。相比较于传统燃料(例如四氧化二氮搭配偏二甲肼),液氢液氧燃料的推力大幅度增加,大大提高了火箭的有效载荷。长征五号B的成功,标志着我国加入了世界火箭发展的第一梯队,令人振奋。

目前,化学燃料仍然是各国火箭的主要推进剂,但是其推进原理有很大的局限性,而且这个局限性是本质的。化学键的能标(energy scale),即形成或打破化学键时能量的变化范围,只有几个电子伏(eV)的数量级。这样小的能标决定了单靠化学燃料难以把火箭推进到第三宇宙速度(16.7 km/s)。化学燃料推进可以实现太阳系内的行星际航行,但是要像科幻小说《三体》中描述的那样,翱翔于星辰大海,进行恒星际航行,就需要摆脱太阳引力,对于这个目标化学燃料显然是力不从心了。

要提高推进速度的上限,则需要提高推进原理的物理能标。本文不分析技术性的困难,只讨论原理上的可能性。文献中经常提到的离子推进(ion propulsion),属于电磁推

进(electromagnetic propulsion)的一种,很容易把能标提高到千电子伏(keV)量级¹⁾。在科幻小说里流行的核动力推进,其能标在兆电子伏(MeV)量级。更加奇幻的正反物质湮灭推进,则可以把火箭推进到逼近光速的程度。下面我们通过简单地推导,来估算这些推进速度的上限。

先回顾一下大学物理课上学过的Tsiolkovsky(齐奥尔科夫斯基)方程。最简单的火箭,莫过于二踢脚了。尽管简单,原理并没有什么不同,也是以喷射火药燃烧的气体来驱动。设其喷射速度相对于火箭为 v_p 。如图所示,在时刻 t ,火箭的飞行速度为 $v(t)$;在此之后 dt 的时间内,向后喷出了质量为 $-dm$ 的气体(火箭质量在减小,所以 $-dm > 0$)。根据动量守恒,有 $mdv + dm v_p = 0$ 。对此式进行积分,可得喷射完成时的火箭速度,

$$v = v_p \ln \frac{1}{r}, \quad (1)$$

其中, $r = m_f/m_0$ 被称作火箭的干湿质量之比。火箭喷射结束时的质量 m_f 被称为干质量,火箭初始质量称为湿质量 m_0 。如果火箭有多级结构,则可以得到,

$$v = v_p \sum_i \ln \frac{1}{r_i}, \quad (2)$$

其中, r_i 是第 i 级推进阶段结束和开始时的干湿质量之比。

v_p 也叫做比冲(specific impulse),即燃烧单位质量的燃料使得火箭得到的冲量,

$$I_{sp} = \frac{dI}{dm} = v_p. \quad (3)$$

文献中,比冲也有另外一种定义,即把式(3)中的单位质量换成单位重量,这样定义的比冲为 v_p/g ,其单位是时间(g 是重力加速度)。

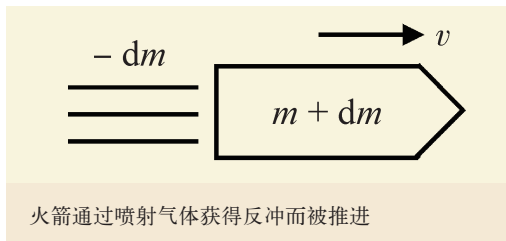
下面对各种推进原理的比冲 v_p 进行数量级估计,包括化学燃料推进、电磁推进、核动力推进、正反物质湮灭推进等。

1 化学燃料推进

化学燃料的燃烧,其实是化学键的断裂和再形成的过程,这中间能量的释放形成火箭推进的动力。化学键是原子间的电子成键,其键能在几个eV量级,因此可以推断其燃烧热为 $c \times 6 \times 10^{23} \text{ eV/mol} \approx c \times 100 \text{ kJ/mol}$,其中 c 是数量级估计中不能确定的常数,大致介于1到10之间。可以查到 H_2 的低热燃烧热,即生成物为水蒸气形态时的燃烧热为120 kJ/g,即240 kJ/mol。这个数据和上面的估算在数量级上是相符的。1 mol H_2 燃烧生成1 mol水,其质量为18 g。据此可以折算出每生成质量为1千克的水蒸气,其放热约 $Q = 13 \text{ MJ}$ 。设这些能量完全转化为水蒸气喷射的机械动能,则给出化学燃料推进的比冲上界,

$$v_p < v_{\text{chm}} = \sqrt{2MQ} \\ = \sqrt{2 \times 13 \times 10^6} \text{ m/s} \approx 5 \text{ km/s}. \quad (4)$$

水是分子量最小的燃烧生成物,氢氧燃料火箭只生成水,其比冲是最佳的。因此, v_{chm} (值为5 km/s)可以

1) https://en.wikipedia.org/wiki/Ion_thruster

作为化学燃料比冲的上限。

再考虑(2)式右方的对数因子。以长征5号B火箭为例,其总重837吨,载荷25吨。火箭除了载荷以外,不会全是燃料,还有箭壳等。估计一下,等式右方的对数之和不会超过 $\ln \frac{837}{25} \approx 3.5$ 。所以,对于一个完全采用化学推进的火箭来说,它所能达到的速度上限可以被估计为,

$$v_{\max} < 3.5 v_{\text{chm}} = 17.5 \text{ km/s} .$$

这样,我们可以得出结论:只采用化学燃料推进方案的火箭,可以达到第二宇宙速度(11.2 km/s),但对于第三宇宙速度则是很勉强的。

2 电磁推进

这是一种用电磁场来加速工作介质并喷射,从而获得反冲的驱动方式。比如“离子推力器”(ion thruster)方案,先将惰性气体电离,用电场把离子加速后喷出。离子动能可以很容易地达到1 keV的量级。Deep space、Dawn等航天器上采用的氙气推进,其比冲可以达到1700—3300 s(以时间为单位),也就是17—33 km/s(以速度为单位)。

可以通过简单地估算来验证这些数据的合理性:氙的原子量为131,其原子的质量用eV做单位是131 GeV。如果用1 kV的电压来加速氙离子(设只带一个正电荷),获得动能1 keV。其比冲可以估算为

$$v_p = c \sqrt{\frac{2E}{Mc^2}} \approx c \sqrt{\frac{2 \times 10^3}{131 \times 10^9}} \\ = 1.2 \times 10^{-4} c \approx 36 \text{ km/s} , \quad (6)$$

其中 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 是光速。

离子推进的比冲大,并不代表其推力(specific thrust)大。推力反映的是火箭的加速性能,而比冲决定了最终能达到的速度。离子推进远比化学推进所产生的推力要小,一

般小于1牛顿。这是因为在单位时间内,能够喷射的离子数目非常少。离子推进只能在无重力高真空的环境中使用,使得火箭经过长时间微小的加速来达到高速度。

3 核反应推进

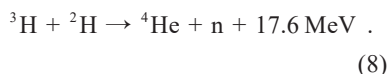
核反应的能标在MeV水平,非常高。先考虑裂变,一个铀235核裂变放出200 MeV能量。质量 M 为1千克的铀235,即4.25 mol,里面有 2.5×10^{24} 个核,释放出 $5 \times 10^{26} \text{ MeV}$ 的能量,也就是 $E = 8 \times 10^{13} \text{ J}$ 。1克TNT的能量是1 kcal。简单换算可知,1千克铀235爆炸的当量相当于2万吨TNT。

假设把核反应生成物喷射出去来实现推动。裂变反应的质量亏损只有千分之一左右,可以忽略不计。如果能量利用率 $\eta = 0.2$,也就是说只有20%可以转换为喷射物的动能,那比冲大致为

$$v_p = \sqrt{\eta 2mE} \sim \sqrt{0.2 \times 2 \times 8 \times 10^{13}} \\ = 5600 \text{ km/s} , \quad (7)$$

这已经超过了光速的百分之一。

核聚变的能量要更高一点,其相应的比冲会更加可观。考虑聚变核反应:



质量 M 为1千克核燃料,其中氘核、氚核等数目混合。这将生成200 mol氦核,放出 $E = 200 \times 6 \times 10^{23} \times 17.6 = 2 \times 10^{27} \text{ MeV}$ 的能量,合 $3.2 \times 10^{14} \text{ J}$ 。这是裂变能量的4倍左右。同样假设20%的能量转换为喷射物的动能,比冲可以达到:

$$v_p = \sqrt{\eta 2mE} \sim \sqrt{0.2 \times 2 \times 3.2 \times 10^{14}} \\ \approx 11300 \text{ km/s} . \quad (9)$$

这已经达到了光速的1/30。

在《三体》一书里面,人类的星际战舰的推进速度,可以达到光

速的1/10。考虑到在上面的估算中对能量转化率估计得比较保守,再考虑到火箭干湿质量的对数因子,核聚变推进确实可以使得火箭达到1/10的光速。这时候相对论效应开始出现,但还不明显,式(1)还可以适用。

4 正反物质湮灭推进

正反物质湮灭发射 γ 射线,采用这种方式来推进火箭,有望逼近光速。这时需要考虑相对论效应,公式(1)就不再适用了。下面来推导相应的火箭运动方程。假设 γ 射线可以由反射装置全部向后方喷射。当然设计能够反射 γ 射线的镜子并不容易,那是未来科学家们的事,我们现在就假设其可行好了。

在地面参照系中,设在时刻 t 火箭的速度为 $v(t)$,并沿着 x 方向;火箭的静止质量为 $m(t)$ 。则火箭的能动量四矢量为

$$p^\mu(t) = (\gamma(t)m(t)v(t), 0, 0, \\ \gamma(t)m(t)c) , \quad (10)$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$ 。在此之后 Δt 的时间内,喷出的 γ 射线能动量四矢量为 $p_\gamma^\mu = (-p_\gamma, 0, 0, p_\gamma)$ 。

能动量守恒给出 $p^\mu(t + \Delta t) + p_\gamma^\mu = p^\mu(t)$ 。因为 γ 光子的能动量四矢量的 x 分量和时间分量之和为0,所以火箭能动量四矢量的相应分量之和则是一个和时间无关的常量: $f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} m$ 。从 $\frac{d \ln f(t)}{dt} = 0$,经过简单的代数运算可得,

$$-\frac{dm}{m} = \frac{d\beta}{1-\beta^2} . \quad (11)$$

设火箭从静止开始推进,对上式进行积分可得,

$$v(t) = c \frac{1-r^2}{1+r^2} , \quad (12)$$

其中 r 是火箭干湿质量比。

5 总结

各种火箭推进原理的物理能标不同，这决定了它们能达到的速度的上限。化学燃料推进的能标是 eV，比冲的上限 5 km/s；电磁推进的能标是 keV，其比冲可以达到 30—40 km/s 的量级。核动力推进的能标是 MeV，其比冲保守估计可以达到 10000 km/s 的量级。这些方案中的喷射物运动都是非相对论的。

在相同能量转化率的条件下，比冲和能标的平方根成正比。对于正反物质湮灭的推进方案，其喷射物是 γ 光子，比冲就是光速本身。

再考虑上火箭干湿质量比的对数因子，化学燃料火箭的推进速度可以达到第二宇宙速度，但是要到达第三宇宙速度会很困难。因此，化学燃料推进是行星际航行的驱动方式。将化学燃料驱动和电磁驱动结合，可以超越第三宇宙速度，是

恒星际航行入门阶段的驱动方式。核动力驱动可以达到 1/10 光速的驱动速度，是恒星际航行正常的驱动方式。当然，正反物质湮灭推进可以逼近光速，是驱动原理的天花板，是星系统航行的推进方式。

致谢 感谢西湖大学程子正、刘鸿祯同学检查本文中的计算。本工作得到了新基石科学基金会的资助。

悟理小言

李政道与玻尔的一则小故事

1995 年夏天，全球华人物理和天文学会在汕头召开第一次大会。会上世界各地学者云集，包括四位华人诺贝尔奖获得者，杨振宁、李政道、丁肇中、李远哲，和中国科学院院长周光召，盛况空前。会议开始前，李政道先生讲述了一段鲜为人知的关于量子力学历史的故事，让我茅塞顿开。

当李先生还在普林斯顿高等研究所时的某一日，玻尔到访。李政道和玻尔共进午餐时，李问玻尔，为什么要那么久才发现解释氢原子光谱的玻尔模型？

量子概念是普朗克于 1900 年为了解释黑体辐射光谱而提出的。1905 年，爱因斯坦利用它创出光子来解释光电效应。但直到 1913 年，玻尔的原子模型才问世，成功地解释了氢原子的光谱。此时距离量子的提出，已经过了 13 年，为什么需要的时间如此长久？这就是李先生的问题。

玻尔的答案，有点出乎意料，是大部分人都不知道的。我问过几位物理前辈，如 Norman Ramsey, Louis Michel, J. David Jackson 等，他们都没有听说过这个件事，所以我认为这是一个鲜为人知、十分值得保留的历史档案。

玻尔说，你不懂，当时没有人会想到氢光谱是从一个原子发出的。

要听到一个沉重的鼓声，一定要一面大鼓，因为鼓面振动的波长不能大于它的直径。其他的经典波也相似，波长不能比波源大。在 1913 年以前，人们已经知道氢的光谱包含可见光，波长是几百纳米。

氢原子的大小也晓得，是二十分之一纳米。波长比原子大了几千、一万倍，氢光谱当然不能从单一的原子发出，只能是由成千上万个氢原子产生的一种集体效应。这就是为什么玻尔说，当时没有人会想到氢光谱是从一个原子发出的。

玻尔的智慧是，他认识到量子效应可以给出另外一种机制。氢光谱不由普通振荡产生，所以光源不一定要比波长大。有了量子效应，就算氢原子那么小的东西，也可能是氢光谱的光源。无论新机制是什么，如果光源的确只是一个原子，那么就必须先解答一个难题：唯一可以用上的参考长度是氢原子的大小，它比波长小了几千到一万倍，这个放大机制是什么？

爱因斯坦用普朗克量子常数 $\hbar$ 把频率变成能量，从而解释了光电效应。玻尔利用 $\hbar$ ，光速 c ，和电子质量 m 造出一个基本长度， $r = \hbar/mc$ 。但这个基本长度 r 很小，只有 3.86×10^{-4} nm，比原子还小得多，但氢谱的波长的确是由这个基本长度经过两次放大而产生。玻尔当时也认识到，从电子的电荷 e 和 $\hbar$ ， c ，可以造出一个缩小因子 $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ 。把 r 放大 $1/\alpha$ 倍后，得到氢原子的大小 0.053 nm，解释了原子大小的来源。再放大 $1/\alpha$ 倍，变成 7.25 nm，这就是光谱波长的基本来源。虽然它比氢光谱的波长还小几十倍，但玻尔模型内出现的其他因子，如 4π 之类，最后会给出氢谱的准确波长。这就是玻尔想出来的新机制，与整体振荡无关。没有量子，没有 $\hbar$ ，这个机制是绝对行不通的。

(加拿大麦吉尔大学 蓝志成 供稿)