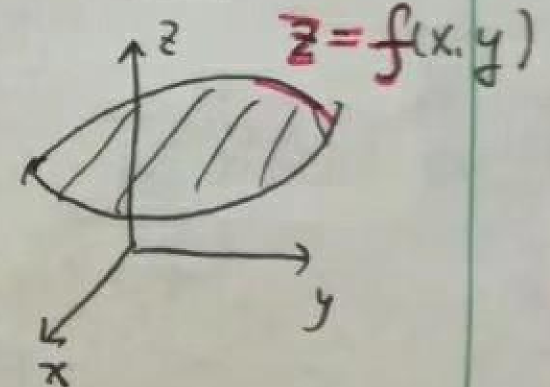
极小曲面 (一) —— 变分法观点

在欧氏几何中，我们知道在二维平面上，给定了二个端点后，在所有连接这两点的曲线中，直线段最短，而直线的曲率为0。

那往三维推广就不平庸了，因为曲面的边界为封闭曲线，而三维空间中的封闭曲线，并不一定共面。这时的面积最小(极小)的曲面并不是平面，而是会被边界所决定的复杂的形状。

下面用变分法来推导极小曲面所满足的微分方程。

考虑一个曲面上的面积元 $d\vec{S} = dxdy\,\hat{z} + dydz\,\hat{x} + dzdx\,\hat{y}$



$$\Rightarrow (dS)^2 = (dxdy)^2 + (dydz)^2 + (dzdx)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{[f]}{S} = \int dxdy\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

S 作为 $z=f(x,y)$ 的泛函，求 $\dfrac{\delta S}{\delta f} = 0$

$$\frac{\delta S}{\delta f} = \int dxdy\,\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \delta f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \delta f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = 0$$

$\downarrow$ 分步积分

$$\Rightarrow \cancel{\int dxdy}\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right] = 0$$

简写 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{xy}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

$$\frac{f_{xx}}{\sqrt{\cdots}} + \frac{(-)f_x(f_x f_{xx} + f_y f_{xy})}{(\sqrt{\cdots})^3} + \frac{f_{yy}}{\sqrt{\cdots}} + \frac{(-)f_y(f_y f_{yy} + f_x f_{xy})}{(\sqrt{\cdots})^3} = 0$$

$$(f_{xx} + f_{yy})(1 + f_x^2 + f_y^2) - (f_x^2 f_{xx} + f_y^2 f_{yy} + 2 f_x f_y f_{xy}) = 0$$

$$\boxed{f_{xx}(1+f_y^2) + f_{yy}(1+f_x^2) - 2 f_x f_y f_{xy} = 0 \quad (*)}$$

① 显然，平面 $f(x,y) = ax + by + C$ 满足上述方程，但这个解是平庸的。

② 1776年 J. B. Meusnier 给出了非线性的解，悬链面和正螺旋面。

A: 需求上述方程旋转面的解 $f(x,y) = h(r)$, where $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f_x = h' \cdot \frac{x}{r}, \quad f_y = h' \cdot y/r$$

$$f_{xx} = h'' \cdot \frac{x^2}{r^2} + h' \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) = h'' \frac{x^2}{r^2} + h' \frac{y^2}{r^3}$$

$$f_{xy} = h'' \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r} + h'\left(-\frac{xy}{r^3}\right)$$

$$f_{yy} = h'' \cdot \frac{y^2}{r^2} + h' \frac{x^2}{r^3}$$

plug in Eq $(*)$ $\Rightarrow$ $\boxed{h'' + \frac{1}{r}(h' + h'^3) = 0}$

设 $y = h'$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{y(1+y^2)} = -\frac{1}{r} dr = -d\ln r$

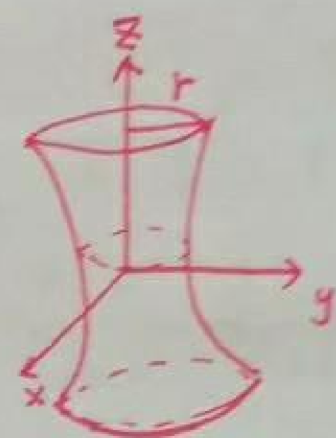
$$\ln \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \ln \frac{1}{r} \cdot C_1 \Rightarrow y = \frac{dh}{dr} = \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} = \frac{1}{\sqrt{(r/c)^2 - 1}}$$

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$\Rightarrow z = h(r) = c\ln\left[\frac{r}{c} + \sqrt{(\frac{r}{c})^2-1}\right] + c'$, where c and c' are two integral constants

调整原点, $\Rightarrow$ set $c'=0$ $\Rightarrow$ $\frac{z}{c} = \ln\left(\frac{r}{c} + \sqrt{(\frac{r}{c})^2-1}\right)$

反解出 $\boxed{\frac{r}{c} = \cosh\frac{z}{c}}$



这是旋转悬链面的方程.

② 直纹面的解:

$z = f(x,y) = h(t)$ where $t = y/x$, $t_x = -\frac{t}{x}$, $t_y = \frac{t}{y}$

$f_x = h'(-\frac{t}{x})$ $\quad f_y = h'\frac{t}{y}$, $\quad f_{xx} = h''\frac{t^2}{x^2} + \frac{h'}{x}\frac{t}{x} + \frac{h't}{x^2}$

$= h''\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{h't}{x^2}$

$$f_{yy} = h''\frac{t^2}{y^2} + \frac{h'}{y}\frac{t}{y} + \frac{h't}{-y^2} = h''\frac{t^2}{y^2}$$

$$f_{xy} = h''(\frac{-t}{x})(\frac{t}{y}) - \frac{h'}{x}\frac{t}{y} = -\frac{h''t^2}{xy} - \frac{h't}{xy}$$

$$\Rightarrow (1+\frac{h'^2t^2}{y^2})(\frac{h''t^2}{x^2} + 2\frac{h't}{x^2}) + (1+\frac{h'^2t^2}{x^2})(h''\frac{t^2}{y^2}) = 2h'^2(-)\frac{t^2}{xy}(-)\left(\frac{h''t^2}{xy} + \frac{h't}{xy}\right)$$

$$\frac{h''t^2 + 2h't}{x^2} + \frac{h''t^2}{y^2} = 0 \Rightarrow \boxed{h''(1+t^2) + 2t h' = 0}$$

Set $y = h'$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -\frac{2t}{1+t^2}$

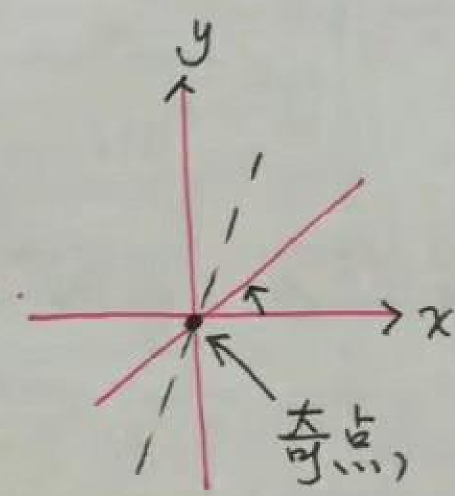
$d\ln y = d\ln\frac{1}{1+t^2} + c$ $\Rightarrow$ $y = \frac{df}{dt} = \frac{c}{1+t^2}$

$\Rightarrow$ $df = c\,\frac{dt}{1+t^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f = c\arctan t + c'}$

选择原点, $f = \boxed{z = c\arctan y/x}$ 即 $z \propto \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

螺旋面:

若固定 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 即与柱面的交线为等距螺旋线。



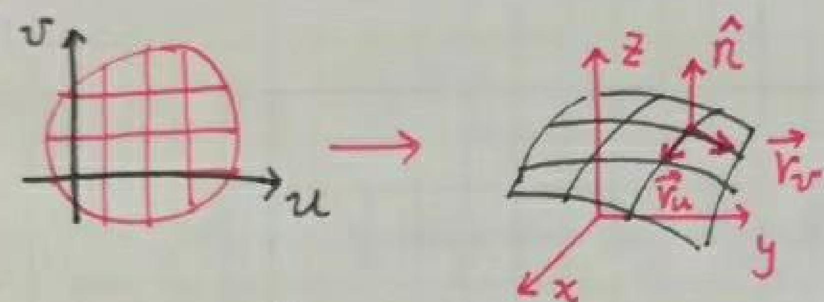
极小曲面 (2) — 曲率的观点,

我们知道，直线的曲率为0，但三维空间中的极小曲面不见得是平面，那么它的曲率方面的特征呢？极小曲面的平均曲率为零，而高斯曲率不一定为零。为了说清这些概念，我们介绍曲面的基本形式。

§ 曲面上的度规 — 第一基本形式

我们用曲面参数(u,v)表征曲面M上的点$P(x.y.z)$。

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$



(u,v)曲纹坐标 — 曲面上 u曲线，
v曲线。

u-曲线 切向量 $\vec{r}_u=(x_u, y_u, z_u)$, $\vec{r}_v=(x_v, y_v, z_v)$,

$\hat{n}=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)/|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|$.

曲面的自然标架 $\{\vec{r};\ \vec{r}_u, \vec{r}_v, \hat{n}\}$，$\vec{r}$是曲面上的点，$\vec{r}_u, \vec{r}_v$ 切向量，$\hat{n}$法向量。

空间的直角坐标系虽然简单，但是脱离了曲面的约束。曲面的自然标架是粘附于曲面上的，随曲面上各点的变化而变化。

设 $d\vec{r}$ 表示曲面M上点 $\vec{r}(u,v)$的切向量，表示为

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \qquad E = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u$$

Hence

$$|d\vec{r}|^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad F = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$$

曲面第一基本形式 ⟶ 曲面上的度量 $\qquad G = \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$：视曲面为坐标$(u,v)$的弯曲空间中的度规张量

曲面上面积元 $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,du\,dv$.　$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2$

$$= EG - F^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \det g$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \int_D du\,dv \sqrt{\det g} = \int_D du\,dv \sqrt{EG - F^2}}$$

$\boxed{\text{这个面积元的公式是与坐标变换无关的.}}$

$$|d\vec{r}|^2 = g_{ij}\, du_i\, du_j = g'_{ij}\, dv_i\, dv_j$$

$$g_{ij}\, du_i\, du_j = g_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial v_{i'}} \frac{\partial u_j}{\partial v_{j'}} dv_{i'}\, dv_{j'} = g_{i'j'} \frac{\partial u_{i'}}{\partial v_i} \frac{\partial u_{j'}}{\partial v_j} dv_i\, dv_j$$

$$\Rightarrow g'_{ij} = g_{i'j'} \frac{\partial u_{i'}}{\partial v_i} \frac{\partial u_{j'}}{\partial v_j} \quad \Rightarrow \det g' = \det g \left| \frac{\partial u_i}{\partial v_j} \right|^2$$

$$\Rightarrow S = \int_D du_1\, du_2 \sqrt{\det g} = \int du_1\, du_2 \sqrt{\det g'} \left| \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \right|$$

$$= \int_D dv_1\, dv_2 \sqrt{\det g'}$$

（为简化记号，这里把坐标写成了 $du_i du_j$ 和 $dv_i dv_j$）.

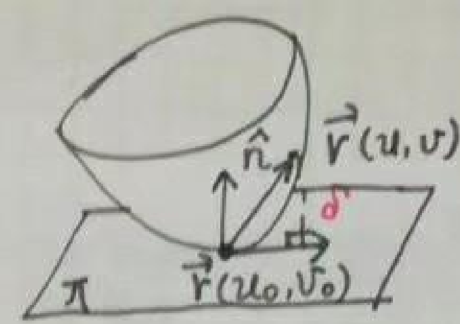
如果采用 $\vec{r} = (x, y, f(x,y)) \Rightarrow \vec{r}_x = (1, 0, f_x)$

$$\vec{r}_y = (0, 1, f_y)$$

$$E = 1 + f_x^2, \quad G = 1 + f_y^2 \quad F = f_x f_y$$

$\Rightarrow EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$，一和前面的一致.

§ 曲面的曲率 — 第二基本形式



设曲面在 $\vec{r}(u_0,v_0)$ 点上的切平面为 π。我们来看在 (u,v) 偏离 (u_0,v_0) 时，$\vec{r}(u,v)$ 偏离切平面的情况.

$$\vec{r}(u,v)-\vec{r}(u_0,v_0)=\left(\vec{r}_u\Delta u+\vec{r}_v\Delta v\right)\Big|_{(u_0,v_0)}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\vec{r}_{uu}(\Delta u)^2+2\vec{r}_{uv}(\Delta u)(\Delta v)+\vec{r}_{vv}(\Delta v)^2\right)+\cdots$$

线性项的偏离全是在切平面内，而在法线方向的偏离是二阶量

定义 $\delta=\frac{1}{2}\left(L\Delta u^2+2M\Delta u\Delta v+N\Delta v^2\right)$，在方法线方向的偏离.

其中 $L=\vec{r}_{uu}\cdot\hat{n}$，$M=\vec{r}_{uv}\cdot\hat{n}$，$N=\vec{r}_{vv}\cdot\hat{n}$

→ 曲面第二基本形式： $\boxed{\mathrm{II}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2.}$

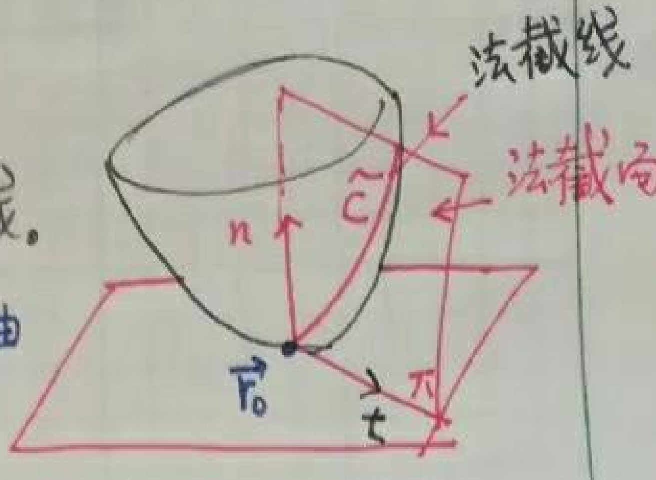
$$\mathrm{II}=\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2}dv^2$$

$$=\left\{[du\ \ dv]\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\ dv\end{bmatrix}\right\}\cdot\hat{n}$$

Hessen matrix

这个表达式也是在参数变换下不变的.

考虑一个过曲面法线 n 的平面，称为法截面。法截面截曲面于 $\tilde{C}$，称为法截线。法截面交切平面于直线 t. 则 $\tilde{C}$ 是一条平面曲线，t 是其切线，$\tilde{C}$ 在切点的法线即 n.



那么在主截面内的曲线 $\tilde{C}$ 的曲率依赖于主截面的方位？

用弧长参量 s，$\tilde{C}$ 的参数方程 $\vec{r}(u(s), v(s))$

$$\vec{r}'(s) = \vec{r}_u \, du/ds + \vec{r}_v \, dv/ds$$

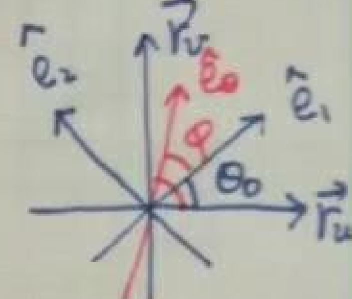
$$\vec{r}''(s) = \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} + \vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$\vec{r}_u, \vec{r}_v$ are in the tangient plane

$$k_n = \vec{r}''(s)\cdot\hat{n} = \vec{r}_{uu}\hat{n}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\vec{r}_{uv}\cdot\hat{n})\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (\vec{r}_{vv}\cdot\hat{n})\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$\boxed{k_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}$$

and $(ds)^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$



为简单计，设 $\vec{r}_u \perp \vec{r}_v$，i.e. $F = 0$

设 $d\vec{r}$ 和 $\vec{r}_u$ 夹角为 θ，$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}_u\cdot d\vec{r}}{|\vec{r}_u||d\vec{r}|} = \sqrt{E}\frac{du}{ds}, \quad \sin\theta = \sqrt{F}\frac{dv}{ds}$$

$$\Rightarrow k_n(\theta) = (\cos\theta \ \ \sin\theta)\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{L}{E} & \frac{M}{\sqrt{EG}} \\ \frac{M}{\sqrt{EG}} & \frac{N}{G} \end{pmatrix}}_{Q}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

Q：本征值 k_1, k_2，本征矢 $\hat{e}_1$ 和 $\hat{e}_2$，设 $\hat{e}_0$ 与 $\hat{e}_1$ 夹角为 φ

$$\Rightarrow \boxed{k_n(\theta) = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi, \quad \text{where } \varphi = \theta - \theta_0.}$$

定义

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right) \\ K &= \frac{LN - M^2}{EG} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$

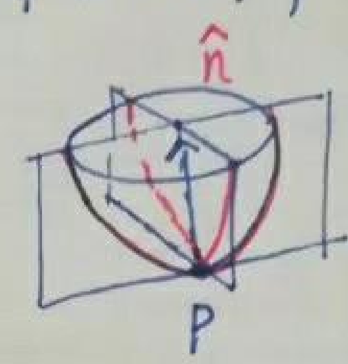
☆ Dupin 标形 $x = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}}\cos\varphi$, $y = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}}\sin\varphi \Rightarrow$

$\boxed{k_1 x^2 + k_2 y^2 = \mathrm{sgn}(k_n)} = \pm 1$.

① 杯点：k_1 and k_2 同号, then Gauss 曲率 $K > 0$, 即沿任意方向的法曲率 k_n 与 $k_{1,2}$ 同号。

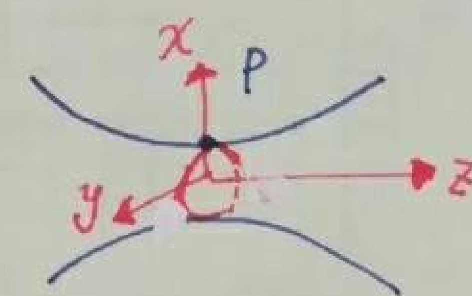
法截线都是朝着一边弯曲的.

杯点也称椭圆点.



② 鞍点, k_1 和 k_2 异号, then Gauss 曲率 $K<0$

单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$

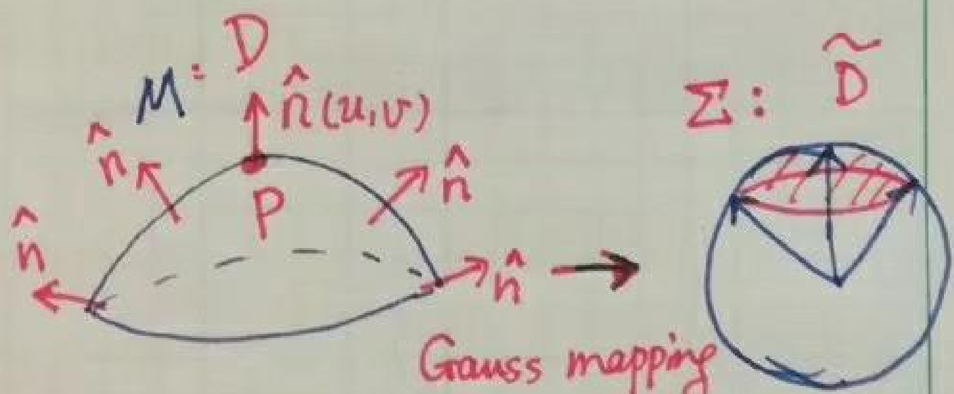


P点, 切平面：左右看向上的山坡

前后看向下的路

"山口"

☆ Gauss 曲率的几何意义:



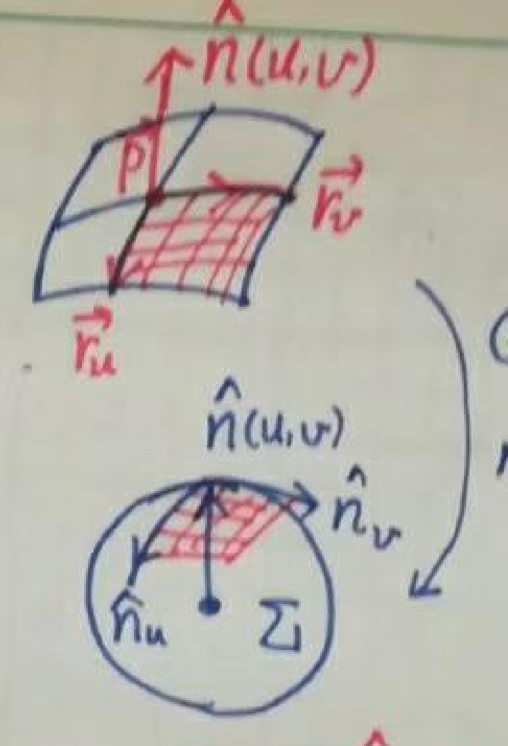
光滑的曲面M: 每一点上有一个法向量 $\hat{n}$. 把这些法向量挪到单位球上, 那么这些向量张成一个立体角度. 这个是高斯映射.

设 D是曲面M上P点附近的一个邻域, $\tilde{D}$ 是D在高斯映射下的立体角. 则

$$\boxed{\frac{\mathrm{Area}(\tilde{D})}{\mathrm{Area}(D)} \xrightarrow[D\to 0]{} \text{Gauss curvature.}}$$

比如: 一个球的曲率: $\frac{4\pi}{4\pi R^2} = 1/R^2$. 曲线的曲率也可类似的定义.

曲线上正交参数网，交点，P，即 $\vec{r}_u \perp \vec{r}_v$.



Gauss 映射 $\hat{n}(u,v)$ 可以看成单位球面 Σ 的参数方程。$\hat{n}_u, \hat{n}_v$ 在球面 Σ 上的切向量，$\hat{n}_u, \hat{n}_v \perp \hat{n}$. 则

$$\begin{cases} \hat{n}_u = \alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v & ① \\ \hat{n}_v = \gamma \vec{r}_u + \delta \vec{r}_v & ① \end{cases}$$

$n_u = \partial_u \hat{n}$, n_v

$\vec{r}_u \cdot \hat{n}_u = \alpha\, \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = \alpha E$,

$\hat{n}_u = \partial_u \hat{n}(u,v)$

$\vec{r}_u \cdot \partial_u \hat{n}(u,v) = -\partial_u \vec{r}_u \cdot \hat{n}$
$= -\vec{r}_{uu} \cdot \hat{n} = -L$

$-L = \alpha E \Rightarrow \alpha = -\frac{L}{E}$

Similarly, $\beta = -\frac{M}{G}$, $\gamma = -\frac{M}{E}$, $\delta = \frac{-N}{G}$

$$\Rightarrow \hat{n}_u \times \hat{n}_v = \frac{LN - M^2}{EG}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = K(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$$

Hence

$$\text{Area}(\hat{D}) = \int |\hat{n}_u \times \hat{n}_v|\, du\, dv = \int |K| \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv$$

$$\boxed{\lim_{D \to P} \frac{\text{Area}(\hat{D})}{\text{Area}(D)} = |K(P)|}$$

(Theorema Egregium) 绝妙定理：曲面的高斯曲率完全由曲面上的度量所决定，(即第一基本形式)，而无须关心曲面上如何嵌入三维空间的. —— 内蕴性质，可以只观注曲面上的性质，即可。

比如：柱面和锥面可以展成平面，而不需作伸缩变换，即保持两点间距离不变。所以它们有相同的高斯曲率，而球面不行。球面如果非弹性的，不能伸缩的话，是不能展成平面，而又不破裂的。

对于函数 $z=f(x,y)$ 的曲面，

$$\vec{r}=(x,\ y,\ f(x,y)) \rightarrow \begin{aligned}\vec{r}_x&=(1,0,f_x)\\ \vec{r}_y&=(0,1,f_y)\end{aligned} \quad \vec{r}_x\times\vec{r}_y=(-f_x,-f_y,1)$$

$$\Rightarrow \hat{n}=\left[-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right]$$

$$E=\vec{r}_x\cdot\vec{r}_x=1+f_x^2,\quad F=\vec{r}_x\cdot\vec{r}_y=f_xf_y,\quad G=\vec{r}_y\cdot\vec{r}_y=1+f_y^2$$

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\hat{n}=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\quad M=\vec{r}_{uv}\cdot\hat{n}=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\quad N=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

对于非正交网络，平均曲率和高斯曲率

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=\frac{1}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}\left[(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}\right]$$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}$$

$\Rightarrow$ 极小曲面条件 $H=0$。

R^3 中平均曲率恒等于 0 的曲面称为极小曲面。

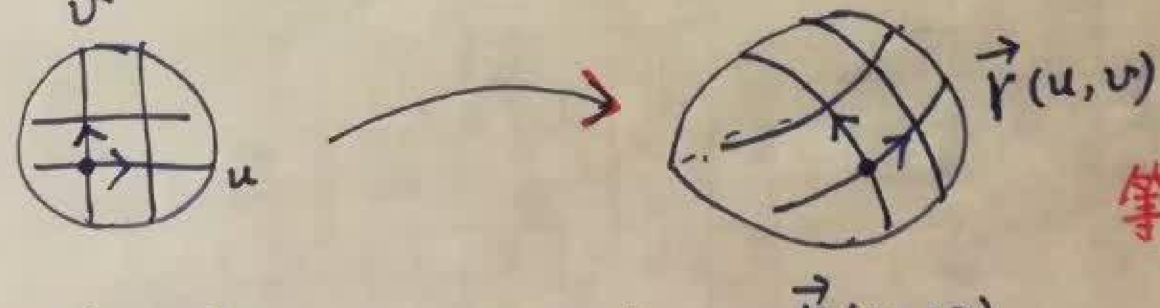
极小曲面(三)—Weierstrass公式，复变函数论观点，

在平面上，引入复数后，复解析函数的方法提供了处理二维问题的强大的工具。那么在曲面上呢？可以证明，在光滑曲面上，可以局部的，和平面建立共形保角(conformal)映射关系。这样就提供了一个从复变函数论的角度，重新审视极小曲面的问题。

① 曲面的等温(isothermal)参数系

对于正则参数曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，where $(u,v)\in D\subset R^2$。我们定义了第一基本形式 $I=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$. 如果 $E=G=\lambda(u,v)$ and $F=0$，则称 (u,v) 是等温参数系。这里不要求 E 和 G 是常数。

对于平面区域 (u,v)，其测度为 du^2+dv^2，曲面上的测度和平面上的只差一个因子。我们知道，这样从平面到曲面上的变换是conformal的。即每一个点 (u,v) 的两个切向量的夹角在映射下不变而且该点各方向上切向量的长度，按同一个比例 $\lambda(u,v)$ 变换.



等温参数系

$$(u,v)\longrightarrow\vec{r}(u,v)$$

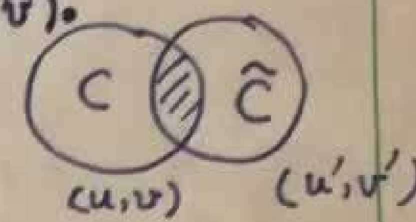
$$du^2+dv^2\qquad\qquad\lambda(u,v)\,(du^2+dv^2)$$

$$\lambda(u,v)=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$$

有向正则(光滑)曲面在局部总是有等温参数系的，因此任两个正则曲面的局部上可以构成保角对应。

※ 等温参数系之间的变换

对于曲面上等温参数系(u,v),定义复变量 $w=u+iv$, i.e. w是曲面上的局部复坐标系。如果考虑,曲面上两个区域 C和$\tilde{C}$,彼此有所重叠。C里面的等温坐标(u,v),$\tilde{C}$的里面的等温坐标$(\tilde{u},\tilde{v})$。



对于$\tilde{C}$,我们也可以定义复坐标系 $\tilde{w}=\tilde{u}+i\tilde{v}$.

我们有 $\lambda(u,v)(du^2+dv^2)=\tilde{\lambda}(\tilde{u},\tilde{v})(d\tilde{u}^2+d\tilde{v}^2)$

$$\Rightarrow \rho(du^2+dv^2)=d\tilde{u}^2+d\tilde{v}^2=\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}\right)^2\right]du^2$$

$$+\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}\right)du\,dv+\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\right)^2\right]dv^2$$

where $\rho=\frac{\lambda}{\lambda'}$ $\Rightarrow$
$$\begin{cases}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\right)^2=\rho\\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}=0\end{cases}$$

这可以用参数解出
$$\begin{cases}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}=\sqrt{\rho}\cos\theta & \frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}=-\sqrt{\rho}\sin\theta\\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}=\sqrt{\rho}\sin\theta & \frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}=\sqrt{\rho}\sin\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}&\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}\\ \frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}&\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\end{pmatrix}=\underbrace{\sqrt{\rho}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}}_{\text{放缩+旋转}}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}=\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}=-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}\end{cases}}$$

> 那么 $\tilde{w}=\tilde{u}+i\tilde{v}$,作为$\tilde{w}(w)$的函数,必是复解析函数。$\longrightarrow$ 2D conformal transformation.

一个曲面M上任一点,的邻域均和复平面上一个开区域建立同胚关系,那么M上的此邻域也建立了复坐标系。如果M上非空

交集的两个区域上的复坐标系之间变换是复解析的，则我们称M是一维复流型，或M是一个黎曼曲面。R^3中任一个有向正则曲面都是一个黎曼曲面，可以引入复坐标来研究。

⊗ 极小曲面的方程 — 复变函数在曲面上

设M是用等温参数(u,v)表示的曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，复坐标 $\omega=u+iv$，则 $\frac{\partial}{\partial\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}\right)$，$\frac{\partial}{\partial\bar{\omega}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right)$

则 $df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{2}(d\omega+d\bar{\omega})+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{2i}(d\omega-d\bar{\omega})$

$$=\frac{\partial f}{\partial\omega}d\omega+\frac{\partial f}{\partial\bar{\omega}}d\bar{\omega}$$

Cauchy-Riemann condition. $\begin{cases}\frac{\partial(\mathrm{Re}f)}{\partial u}=\frac{\partial(\mathrm{Im}f)}{\partial v}\\ \frac{\partial(\mathrm{Re}f)}{\partial v}=-\frac{\partial(\mathrm{Im}f)}{\partial u}\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial\bar{\omega}}=0$.

下面，我们把复解析函数推广到曲面上。

定义：$\vec{\varphi}=2\frac{\partial\vec{r}}{\partial\omega}=\vec{r}_u-i\vec{r}_v$，所以$\vec{\varphi}$是一个复向量，是曲面。

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\bar{\omega}}=\frac{1}{2}(\partial_u+i\partial_v)(\vec{r}_u-i\vec{r}_v)=\frac{1}{2}(\vec{r}_{uu}+\vec{r}_{vv})$$

这个矢量实际上是沿着法向量：比如

$$\vec{r}_u\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\bar{\omega}}=\frac{1}{2}\left[\vec{r}_u\cdot\vec{r}_{uu}+\vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_u\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u)+\partial_v[\vec{r}_v\cdot\vec{r}_u]-\vec{r}_v\cdot\vec{r}_{uv}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u-\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v\right]\right]=0 \leftarrow \text{用了等温参数系}$$

同理 $\vec{r}_v\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\bar{\omega}}=0 \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\omega}}\parallel\hat{n}$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \bar{\omega}} \cdot \hat{n} = \frac{1}{2}(\vec{r}_{uu} \cdot \hat{n} + \vec{r}_{vv} \cdot \hat{n}) = \frac{1}{2}(L+N)$$

对比 $H = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right) = \frac{1}{2\lambda}(L+N) \leftarrow E=G=\lambda$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \bar{\omega}} = \lambda H \hat{n}$， Hence，对于极小曲面

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \bar{\omega}} = \vec{r}_{uu} + \vec{r}_{vv} = 0}$$

极小曲面 M 的充分必要条件是它的参数方程 $\vec{r}(u,v)$ 是等温参数 (u,v) 的调和函数. ✓ → 极小曲面的 Conformal 结构.

或 $\vec{\varphi} = \vec{r}_u + i\vec{r}_v$ 仅是 $\omega = u+iv$ 的函数。$\vec{\varphi}$ 的三个分量均为 ω 的解析函数。

☆ Weierstrass Solution

$$\vec{\varphi} = \vec{r}_u - i\vec{r}_v, \quad \Rightarrow \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u - \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - 2i(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) = 0$$

记 $\vec{\varphi}$ 三个分量 $\varphi_{1,2,3}$，即
$$\begin{cases} \varphi_1 = x_u - i x_v = \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2 = y_u - i y_v = \varphi_2(u,v) \\ \varphi_3 = z_u - i z_v = \varphi_3(u,v) \end{cases}$$

$\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = 0 \Rightarrow \quad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$

定义 $f = \varphi_1 - i\varphi_2$，假定 $f \neq 0$. 设 $g = \frac{\varphi_3}{f}$

则 $\quad \varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{\varphi_3^2}{f} = -f \cdot g^2$

$$\begin{cases} f \text{ 是两个解析函数的和} \Rightarrow f \text{ 是全纯函数 (holomorphic)} \\ g = \varphi_3/f \text{ 是 } (u+iv) \text{ 的半纯函数 (meromorphic function)} \end{cases}$$

或反之，选 $(u,v)\in D$，在 D 上选取 holomorphic function $f(\omega)$，

D是平面区域

和 meromorphic function $g(\omega)$. 有

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} f(1-g^2) \\ \varphi_2 = \frac{i}{2} f(1+g^2) \\ \varphi_3 = fg \end{cases}}$$

由于 $\varphi_{1,2,3}$ 是 regular function. g 的 poles 必须~~在~~被 f's zeros 包含 而其阶数2倍 $<$ f 相应 zero 的阶数.

又 $|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 = \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)^2 > 0$

$\Rightarrow$ f 没有除 g's poles 以外的零点，而且 f's zero 阶数不能 $>$ g 奇点，阶数两倍.

$\Rightarrow$ f 的 zeros 和 g pole's 必须重合，而且 zero 阶数是 ~~奇~~ 极点的两倍。

从 $\vec{\varphi} = 2\frac{\partial \vec{r}}{\partial \omega}$ $\Rightarrow$ $\vec{\varphi}\, d\omega = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} - i\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)(du + i\,dv)$

$$= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv\right) + i\left(-\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}dv\right)$$

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} d\vec{r} = \int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \\ \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ 梯度，和积分路径无关

$$\boxed{\vec{r}(u,v) = \mathrm{Re}\int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} \vec{\varphi}\, d\omega}$$

总结一下：$M: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$. M是以 (u,v) 为等温参数系的极小曲面. 定义 D上 holomorphic function f and meromorphic function g, such that f's zeros coincide with g's poles. The order of ~~poles~~ each zero is twice ~~of~~ that of the corresponding pole. ⇒ M的参数方程 $\vec{r}(u,v)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &x = \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} \frac{1}{2} f(1-g^2)\,dw, \quad y = \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} \frac{i}{2} f(1+g^2)\,dw \\ &z = \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} fg\,dw \qquad f, g \text{ 称为 W因子.} \end{aligned}}$$

✻ W-因子几何意义

$$2\lambda = |\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v| = |\vec{\varphi}|^2 = \frac{1}{2}|f|^2[1+|g|^2]^2$$

⇒ 第一基本形式: $\mathrm{I} = \frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)^2(du^2+dv^2)$

$$\vec{r}_u = \frac{1}{2}(\vec{\varphi} + \bar{\vec{\varphi}}), \quad \vec{r}_v = \frac{i}{2}(\vec{\varphi} - \bar{\vec{\varphi}}) \Rightarrow \vec{r}_u \times \vec{r}_v = -\frac{i}{2}(\vec{\varphi} \times \bar{\vec{\varphi}})$$

$$\vec{\varphi} = \left(\frac{1}{2}f(1-g^2), \frac{i}{2}f(1+g^2), fg\right)$$

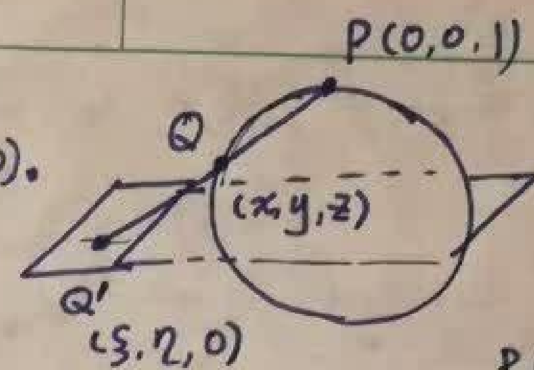
$$\bar{\vec{\varphi}} = \left(\frac{1}{2}\bar{f}(1-\bar{g}^2), -\frac{i}{2}\bar{f}(1+\bar{g}^2), \bar{f}\bar{g}\right)$$

$$\vec{\varphi} \times \bar{\vec{\varphi}} = \frac{i}{2}|f|^2(1+|g|^2)(2\mathrm{Re}\,g, 2\mathrm{Im}\,g, |g|^2-1)$$

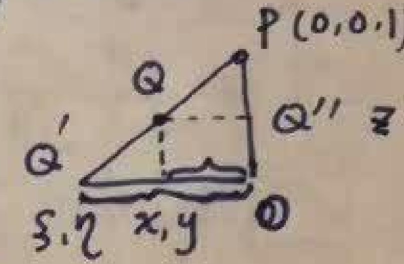
$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \left(\frac{2\mathrm{Re}\,g}{|g|^2+1}, \frac{2\mathrm{Im}\,g}{|g|^2+1}, \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}\right)$$

$\boxed{\text{球极投影}}$：单位球北极 $(0,0,1)$。

$Q(x,y,z)$，连 PQ 交赤道面与 $Q'(\xi,\eta,0)$。



$$\frac{y}{\eta}=\frac{x}{\xi}=\frac{PQ}{PQ'}=\frac{PQ''}{PO}=\frac{1-z}{1}$$



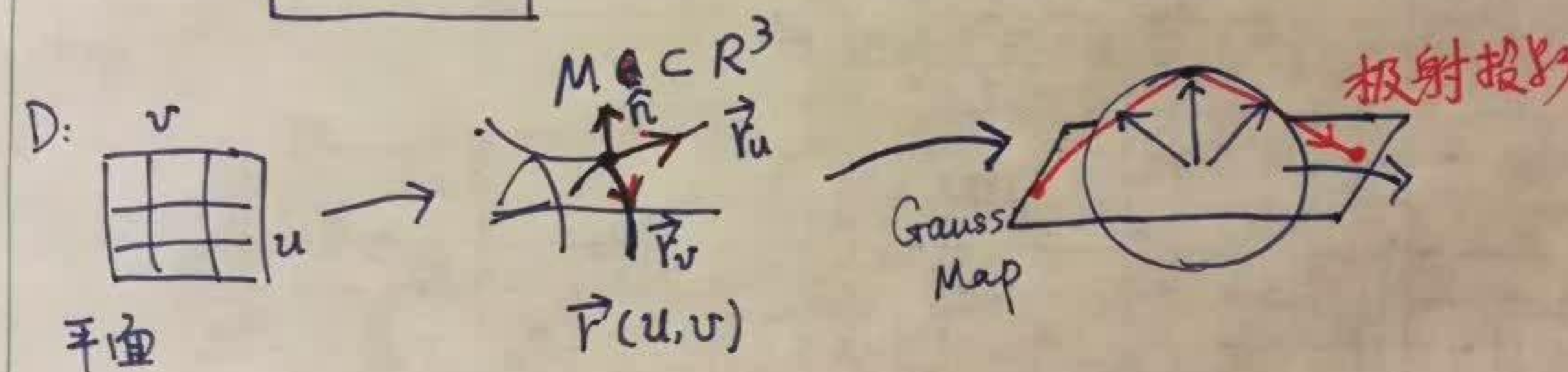
$$\Rightarrow \xi=\frac{x}{1-z}\ ,\ \eta=\frac{y}{1-z}$$

plug in $\begin{cases} z=\cos\theta \\ x=\sin\theta\cos\varphi \\ y=\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \xi=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cos\varphi=\cot\dfrac{\theta}{2}\cos\varphi \\ \eta=\cot\dfrac{\theta}{2}\sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\zeta=\xi+i\eta=\cot\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}}$$ ← P 无穷远点

$$\zeta=\left(\frac{2\operatorname{Re}g}{|g|^2+1}+i\frac{2\operatorname{Im}g}{|g|^2+1}\right)\Big/\left(1-\frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}\right)=\operatorname{Re}g+i\operatorname{Im}g$$

$$\boxed{\zeta=g(\omega)}$$



$\omega=u+iv$ $\qquad M\longrightarrow C\cup(\infty)$: $g(\omega)$

极小曲面 M 的 Gauss 映射：$\omega=u+iv\longrightarrow \zeta=g(\omega)$。

g 的极点 $\longrightarrow$ P 北极点。

极小曲面(4) — Weierstrass 表示

借助于复变函数论，我们得到了极小曲面的通解 - Weierstrass 公式：$\boxed{\vec{r} = \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} \vec{\varphi}\, dw, \text{ where } \vec{\varphi} = \left(\frac{f}{2}(1-g^2), \frac{i}{2}f(1+g^2), fg\right)}$

其中 f, g 分别是复平面上全纯和亚纯函数.

Example 1：悬链面 catenoid

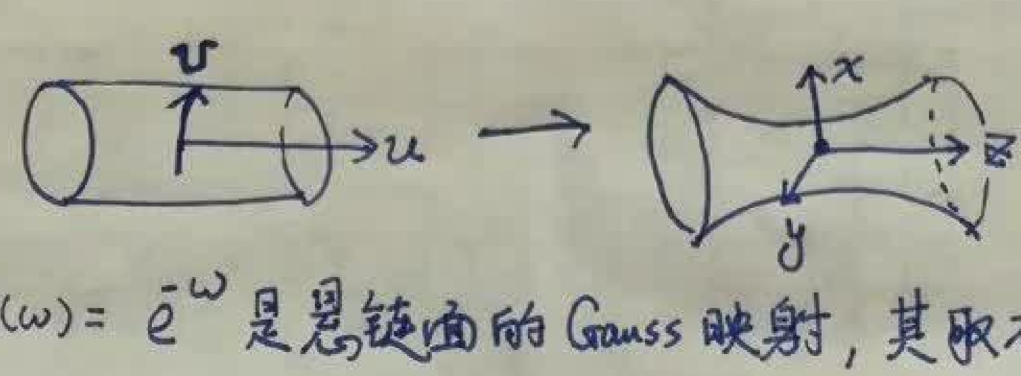
设 D 是复平面 C，$f(w) = e^{w}$，$g(w) = e^{-w}$. $f(w)$ 和 $g(w)$ 都没有零点.

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{f}{2}(1-g^2) = \frac{1}{2}e^{w}(1-e^{-2w}) = \mathrm{sh}\, w \\ \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2) = \frac{i}{2}e^{w}(1+e^{-2w}) = i\,\mathrm{ch}\, w \\ \varphi_3 = fg = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \mathrm{Re}\int_0^{w} \mathrm{sh}\, w\, dw \overset{\mathrm{Re}}{=} (\mathrm{ch}\, w - 1) = \mathrm{ch}\, u \cos v - 1 \\ y = \mathrm{Re}\int_0^{w} i\,\mathrm{ch}\, w\, dw = \mathrm{Re}(i\,\mathrm{sh}\, w) = -\mathrm{ch}\, u \sin v \\ z = \mathrm{Re}\int_0^{w} dw = u \end{cases}$$

$\Rightarrow$ catenoid 参数方程：$\boxed{(x+1)^2 + y^2 = \mathrm{ch}^2 z}$.

固定 v，→ 一条经线，v 是旋转的角度. 在 $v: -\infty \to +\infty$ 过程中，纬圆被绕了无穷多次. 如果把平面沿实轴卷起来成一圆柱，则与 catenoid 同胚



$\boxed{ds^2 = \mathrm{ch}^2 u\,(du^2 + dv^2)}$

$g(w) = e^{-w}$ 是悬链面的 Gauss 映射，其取不到 $0, \infty$ 两个值. ∞ 的含义

整个无穷远包括所有方位角，所以 e^{-w} 不能包括所有方位，故不能映到 ∞。

Ex 2. helicoid（螺旋面）

设 $D=\mathbb{C}$，$f(w)=-ie^{w}$，$g(w)=e^{-w}$. $\Rightarrow$

$$\begin{cases}\varphi_1=\frac{f}{2}(1-g^2)=\frac{-i}{2}e^{w}(1-e^{-2w})=-i\,\mathrm{sh}w\\ \varphi_2=\frac{i}{2}f(1+g^2)=\frac{e^{w}}{2}(1+e^{-2w})=\mathrm{ch}w\\ \varphi_3=fg=-i\end{cases}$$

和悬链面一个表达式，但是虚部

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\mathrm{Re}\int_0^w(-i\,\mathrm{sh}w)\,dw=\mathrm{Im}\int_0^w\mathrm{sh}w\,dw=\mathrm{sh}u\sin v\\ y=\mathrm{Re}\int_0^w\mathrm{ch}w\,dw=\mathrm{Im}\int_0^w i\,\mathrm{ch}w\,dw=\mathrm{sh}u\cos v\\ z=\mathrm{Re}\int_0^w-i\,dw=\mathrm{Im}\int_0^w dw=v\end{cases}$$

这里正螺旋面 $z=\arctan x/y$ 的参数方程。

① 设 v 为 const，$\rightarrow$ 直母线 $z=v$ 平面内，$\frac{x}{y}=\tan v$ 的直线。

② 设 u const，面上的螺旋线，半径为 $\mathrm{sh}v$，螺距为 2π.

Helicoid and catenoid 的 W 因子 g 是一样，而 f 相差一个位相因子.
下面我们证明，它们有相同的曲面第一基本形式：

$$I=E\,du^2+2F\,du\,dv+F\,dv^2=\lambda(du^2+dv^2)\leftarrow\text{等温参}$$

$$\lambda=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v=\frac{1}{2}\vec{\varphi}\cdot\bar{\vec{\varphi}}=(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2+|\varphi_3|^2)/2$$

$$\boxed{\lambda=\tfrac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)^2}$$

$\Rightarrow$ λ 是相同的，对 helicoid 和 catenoid. $\Rightarrow$ 相同的测度

而且相同的高斯映射 $g(w)$. 它们是一对共轭的极小曲面.

事实上，我们可以定义一族极小曲面 $f_\theta(w) = e^{i\theta} f(w)$, $g(w)$. $u(1)$

它们是一族等距的曲面，记为 M_θ，它们在相对应的点，i.e. 有共同的参数坐标 (u,v)，则相对应的单位法向量相同，即高斯映射的像相同。

设 M 为极小曲面在 $\theta=0$ 时，其参数方程为

共轭
$$\begin{cases} \vec{r}_0 = Re\int_{w_0}^{w} \vec{\varphi}_0 \, dw, \quad \text{where } \vec{\varphi}_0 = \left(\frac{f}{2}(1-g^2), \frac{f}{2}(1+g^2), fg\right) \\ \vec{r}_{\frac{\pi}{2}} = Re\int_{w_0}^{w} e^{+i\frac{\pi}{2}} \vec{\varphi}_0 \, dw = -Im\int_{w_0}^{w} \vec{\varphi}_0 \, dw \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_\theta = Re\left[\int_{w_0}^{w} e^{i\theta} \vec{\varphi}_0 \, dw\right] = Re\left[\cos\theta \, Re\int_0^w \vec{\varphi}_0 \, dw - \sin\theta \, Im\int_0^w \vec{\varphi}_0 \, dw\right]$$

$$\boxed{\vec{r}_\theta = \cos\theta \, \vec{r}_0 + \sin\theta \, \vec{r}_{\pi/2}}$$

悬链面　　螺旋面

一族极小曲面，从一个 $\vec{r}_0(u,v)$ 到其共轭极小曲面的等距变形。

• 见彩图：

把悬链面沿经线剪开，拧成螺旋面的一个螺距 $\longleftrightarrow$ 等距变形。

悬链面在 z 固定时截一个圆，而螺旋面截出一条直线。

• **共形变换下，极小曲面不变：**

设 $w = u+iv \in$ 定义域 D，对 D 作 conforma transformation $D \to \tilde{D}$, and $\xi \in \tilde{D}$. 则此变换 $w = w(\xi)$. 则对应于 $\xi \in \tilde{D}$

有设
$$\begin{cases} \tilde{f}(\xi) = f(w) \, dw/d\xi \\ \tilde{g}(\xi) = g(w(\xi)) \end{cases} \Rightarrow \tilde{\vec{\varphi}}(\xi) = \vec{\varphi}(w) \, dw/d\xi$$

$$\Rightarrow \vec{r} = Re\int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{\vec{\varphi}}(\xi) \, d\xi = Re\int_{w_0}^{w} \vec{\varphi}(w) \, dw$$